19/12/2024 — L2 Math
Université Paris Cité — Algèbre

Contrôle final

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculettes et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Considérons l'élément suivant du groupe symétrique S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Déterminer la signature de σ.
4. Quel est l'ordre de σ ?
5. L'élément σ est-il d'ordre maximal dans le groupe S_7 ?
6. Y a-t-il des sous-groupes non isomorphes d'ordre 6 dans S_7 ?

Exercice 2. Soient a et b deux nombres réels. Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$T = \begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ a-b & a & a+b \\ 0 & a-b & a \end{pmatrix}. \text{ Posons } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire T comme une combinaison linéaire de A et B.
2. Les matrices A et B commutent-elles ?
3. Les matrices A et B admettent-elles des bases communes de diagonalisation ?
4. Montrer que le polynôme caractéristique P_u de l'endomorphisme u est $-(X-a)(X^2 - 2aX + (2b^2 - a^2))$.
5. Quel est le déterminant de u ?
6. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on u inversible ?
7. À quelle condition sur a et b a-t-on u diagonalisable sur $\mathbf{R}$?
8. À quelle condition sur a et b a-t-on u diagonalisable sur $\mathbf{C}$?
9. Quelles sont les valeurs propres de u ?
10. Déterminer un vecteur propre pour u.
11. Si $a > b > 0$, déterminer une base de diagonalisation de u. Donner la matrice de passage.
12. Si $b = a$, écrire T comme $P(D+N)P^{-1}$, où D est une matrice diagonale, N est une matrice nilpotente, avec $ND = DN$, et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$.
13. Si $b = a$, calculer T^n pour n entier ≥ 0.
14. Si $a = 0$ et $b = 1$, calculer T^n pour n entier ≥ 0.