
Contrôle final

Les exercices sont indépendants. Les documents, calembrets et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Considérons l'élément suivant du groupe symétrique S_8 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 8 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer la signature de σ .
3. Décomposer σ^{-1} en produit de transpositions.
4. Déterminer $\tau \in S_8$ tel que $\tau^2 = \sigma$.
5. Quel est l'ordre de τ ?

Exercice 2. Soient a et b deux nombres réels. Soit $u : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice de u^2 dans la base canonique.
2. L'endomorphisme u est-il inversible ?
3. Déterminer une base du noyau de u .
4. Déterminer une base du noyau de u^2 .
5. Quelle est la dimension de l'image de u ?
6. Calculer le polynôme caractéristique de u .
7. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on u diagonalisable sur \mathbf{R} ?
8. À quelle condition sur a et b a-t-on u diagonalisable sur \mathbf{C} ?
9. Quelles sont les valeurs propres de u^2 ?
10. Lorsque u est diagonalisable sur \mathbf{C} , donner une base de diagonalisation.
11. Lorsque u n'est pas diagonalisable sur \mathbf{C} , donner une base de trigonalisation.
12. Dans chaque cas, donner le polynôme minimal de u .
13. Est-ce le polynôme caractéristique de u ?
14. Si $a = b$, calculer M^n , pour n entier ≥ 1 .
15. Si $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$, calculer M^n , pour n entier ≥ 1 .