Corrigé du contrôle final

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculettes et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1.

1. On a $\sigma = (1\,4\,7\,3\,6)(2\,5)$.
2. On a $\sigma = (1\,4)(4\,7)(7\,3)(3\,6)(2\,5)$.
3. C'est le produit d'un 5-cycle et d'un 2-cycle, donc de signature $1 \times (-1) = -1$.
4. C'est le ppcm des ordres des cycles qui composent σ. C'est-à-dire $\mathrm{ppcm}(5, 2) = 10$.
5. Non, car la permutation $(1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)$ est d'ordre 12.
6. Le groupe $\mathcal{S}_7$ contient $\mathcal{S}_3$ qui est non-abélien d'ordre 6 et le groupe engendré par un 6-cycle, qui est abélien d'ordre 6. Ces groupes ne sont donc pas isomorphes.

Exercice 2.

1. On a $T = aA + bB$.
2. Non.
3. Des matrices qui admettent une base commune de diagonalisation commutent. Donc il n'y a pas de telle base.
4. C'est le déterminant de la matrice $T = \begin{pmatrix} a-X & a+b & 0 \\ a-b & a-X & a+b \\ 0 & a-b & a-X \end{pmatrix}$.
   On peut le développer suivant la règle de Sarrus pour obtenir $P_u(X) = (a-X)^3 + 0 + 0 - (a-X)(a-b)(a+b) - 0 - (a-X)(a-b)(a+b) = (a-X)((a-X)^2 - 2(a^2-b^2)) = (a-X)(X^2 - 2aX + 2b^2 - a^2)$.
5. Il suffit de calculer le polynôme caractéristique de u en $X = 0$. On trouve $a(2b^2 - a^2)$.
6. Ce sont les valeurs pour lesquelles le déterminant de u est non nul. C'est-à-dire $a = 0$ et $a = \pm\sqrt{2}b$.
7. Il suffit pour cela que le polynôme caractéristique de u soit scindé sur $\mathbf{R}$ avec des racines simples. Le facteur $(X^2 - 2aX + 2b^2 - a^2)$ a pour discriminant (réduit) $a^2 + a^2 - 2b^2 = 2(a^2 - b^2)$ et pour racines $a \pm \sqrt{2(a^2 - b^2)}$. Ainsi P_u est scindé sur $\mathbf{R}$ avec des racines simples lorsque $a^2 > b^2$. Lorsque $a^2 < b^2$, le polynôme n'est pas scindé et u n'est donc pas diagonalisable. Lorsque $a = b$ ou $a = -b$, avec $a \neq 0$, la matrice T est triangulaire et s'écrit comme $aI_3 + N$, où N est une matrice nilpotente non nulle. Ainsi u n'est pas diagonalisable. Lorsque $a = b = 0$, u est nul et donc diagonalisable.

8. Sur **C** tout polynôme est scindé. De même que ci-dessus les racines sont simples si et seulement si $a^2 \neq b^2$. Lorsque $a^2 = b^2$, u n'est pas diagonalisable, par le même raisonnement, sauf si $a = b = 0$.
9. Ce sont les racines de P_u. C'est-à-dire : a, $a + \sqrt{2(a^2 - b^2)}$, $a - \sqrt{2(a^2 - b^2)}$.
10. Cherchons un vecteur propre associé à la valeur propre a. On trouve $(a+b, 0, b-a)$ si $(a,b) \neq (0,0)$. Si $(a,b) = (0,0)$ tout vecteur non nul convient.
11. Dans ce cas, u est diagonalisable, comme on l'a vu. On a déjà identifié le vecteur propre $(a+b, 0, b-a)$. Le vecteur propre associé à la valeur propre $a + \sqrt{2(a^2 - b^2)}$ est $(a + b, \sqrt{2(a^2 - b^2)}, a - b)$. Le dernier vecteur propre est associé à la valeur propre $a - \sqrt{2(a^2 - b^2)}$; c'est $(a + b, -\sqrt{2(a^2 - b^2)}, a - b)$.

    La matrice de passage est $\begin{pmatrix} a+b & a+b & a+b \\ 0 & \sqrt{2(a^2-b^2)} & -\sqrt{2(a^2-b^2)} \\ b-a & a-b & a-b \end{pmatrix}$.
12. Si $b = a$, on a $T = aI_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices aI_3 et N commutent.
13. Ainsi, on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $T^n = (aI_3 + N)^n$. En utilisant que $N^3 = 0$, la formule du binôme devient $T^n = a^n I_3 + na^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}N^2$. Comme $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 2na^n & 2n(n-1)a^n \\ 0 & a^n & 2na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.
14. Dans ce cas, on a $T = B$. D'après le calcul du polynôme caractéristique de B, et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $T^3 = -2T$. Soit k un entier ≥ 1. Si $n = 2k$, on a $T^{2k} = (-2)^{k-1}T^2$. Si $n = 2k+1$, on a $T^{2k+1} = (-2)^k T$. Par ailleurs, on a $T^2 = B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi on trouve $T^{2k} = \begin{pmatrix} -(-2)^{k-1} & 0 & (-2)^{k-1} \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ (-2)^{k-1} & 0 & -(-2)^{k-1} \end{pmatrix}$ et $T^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^k & 0 \\ -(-2)^k & 0 & (-2)^k \\ 0 & -(-2)^k & 0 \end{pmatrix}$.