13/01/2025 | L2 Math
Université Paris Cité | Algèbre

Corrigé du contrôle final

Exercice 1. Considérons l'élément suivant du groupe symétrique S_8 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 8 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
   On a $\sigma = (1\,7\,3\,5\,6)(2\,4\,8)$ (produit d'un 5-cycle et d'un 3-cycle).
2. Déterminer la signature de σ.
   La signature est $(-1)^{5-1}(-1)^{3-1} = 1$.
3. Décomposer σ^{-1} en produit de transpositions.
   On a $\sigma = (1\,7)(7\,3)(3\,5)(5\,6)(2\,4)(4\,8)$ et donc $\sigma^{-1} = (4\,8)(2\,4)(5\,6)(3\,5)(7\,3)(1\,7)$.
4. Déterminer $\tau \in S_8$ tel que $\tau^2 = \sigma$.
   Comme $\sigma^{15} = \mathrm{Id}$, on a $(\sigma^8)^2 = \sigma$. Posons $\tau = \sigma^8 = (1\,5\,7\,6\,3)(2\,8\,4)$.
5. Quel est l'ordre de τ ?
   A priori, τ n'est pas forcément l'élément ci-dessus. Notons d son ordre. σ est d'ordre $\mathrm{ppcm}(3, 5) = 15$. On a $\tau^{30} = \sigma^{15} = 1$ et $\sigma^d = 1$. Donc on a $15|d$ et $d|30$, d'où $d = 15$ ou 30. Écrivons τ comme produit de cycles à supports disjoints de longueurs l_1, l_2, ..., l_k, avec $l_1 + l_2 + ... + l_k \leq 8$. On a $d = \mathrm{ppcm}(l_1, l_2, ..., l_k)$. Si $d = 30$, on a des divisibilités par 2, 3, et 5. Cela force $l_1 + l_2 + ... + l_k \geq 10$. Ainsi $d = 15$.

Exercice 2. Soient a et b deux nombres réels. Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice de u^2 dans la base canonique.
   On a $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ab & a^2 \\ -ab & 2a^2 & ab \\ a^2 & -ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$.
2. L'endomorphisme u est-il inversible ?
   Le déterminant de u est 0. Donc u n'est pas inversible.
3. Déterminer une base du noyau de u.
   On trouve une droite de base $(a, b, -a)$ si $(a, b) \neq (0, 0)$.
4. Déterminer une base du noyau de u^2.
   Même réponse si $2a^2 - b^2 \neq 0$. Si $2a^2 - b^2 = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, on trouve le plan d'équation $-ax + by + az = 0$ de base $((a, b, -a), (1, 0, 1))$.

5. Quelle est la dimension de l'image de u ?
   L'image de u a dimension 2 si $2a^2 \neq b^2$, dimension 1 si $2a^2 = b^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, dimension 0 si $(a, b) = (0, 0)$.
6. Calculer le polynôme caractéristique de u.
   C'est $(-X)^3 - ba^2 + ba^2 + a^2X + a^2X - b^2X = -X^3 + (2a^2 - b^2)X$.
7. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on u diagonalisable sur $\mathbf{R}$?
   Si $b^2 > 2a^2$, P_u n'est pas scindé et u n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Si $b^2 < 2a^2$, P_u est scindé à racines simples et u est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Si $b^2 = 2a^2 \neq 0$, P_u a une unique racine 0 ; mais $u \neq 0$ et u n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Si $a = b = 0$, u est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.
8. À quelle condition sur a et b a-t-on u diagonalisable sur $\mathbf{C}$?
   Si $b^2 \neq 2a^2$, P_u est scindé à racines simples. Donc u est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Si $b^2 = 2a^2 \neq 0$, P_u a l'unique racine 0 ; mais $u \neq 0$ et u n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Si $a = b = 0$, u est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
9. Quelles sont les valeurs propres de u^2 ?
   Les racines complexes de P_{u^2} sont les carrés des racines complexes de P_u. Si $b^2 = 2a^2$, 0 est la seule valeur propre de u. Si $b^2 \neq 2a^2$, les racines complexes de P_u sont 0 et $\pm\sqrt{2a^2 - b^2}$. Les valeurs propres de u^2 sont donc 0 et $2a^2 - b^2$.
10. Lorsque u est diagonalisable sur $\mathbf{C}$, donner une base de diagonalisation.
    Supposons $b^2 \neq 2a^2$. Les vecteurs propres sont $(a, b, -a)$, $(\epsilon\sqrt{2a^2 - b^2} + b, 2a, \epsilon\sqrt{2a^2 - b^2} - b)$ avec $\epsilon = 1$ ou -1. Si $a = b = 0$, toute base convient.
11. Lorsque u n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{C}$, donner une base de trigonalisation.
    On a alors $b^2 = 2a^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors u est nilpotent d'ordre 3. Soit $v \in \mathbf{R}^3$ tel que $u^2(v) \neq 0$; alors (v, Mv, M^2v) est une base de trigonalisation. Par exemple, $v = (1, 1, 1)$ convient.
12. Dans chaque cas cas, donner le polynôme minimal de u.
    Si $b^2 \neq 2a^2$, le polynôme minimal est $-P_u$. Si $b^2 = 2a^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, le polynôme minimal est X^2. Si $a = b = 0$, c'est X.
13. Est-ce le polynôme caractéristique de u ?
    C'est P_u (au signe près) si et seulement si $b^2 \neq 2a^2$.
14. Si $a = b$, calculer M^n, pour n entier ≥ 1.
    Dans ce cas, on a $P_u = -X^3 + a^2X$. On a donc $M^3 = a^2M$, par Cayley-Hamilton. Donc $M^{2k} = a^{2k-2}M^2$ si k est un entier ≥ 1. On a $M^{2k+1} = a^{2k}M$ si k est un entier ≥ 0.
15. Si $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$, calculer M^n, pour n entier ≥ 1.
    On a alors $M^3 = 0$ et donc $M^n = 0$ pour n entier > 2.