EXAMEN du 26 mai 2024

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées. Les parties sont indépendantes.

I

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soient V_1, V_2 des objets de $\mathcal{C}$. Soit un triplet (P, π_1, π_2) composé d'un objet P de $\mathcal{C}$ et de deux morphismes $\pi_i : P \rightarrow V_i$ ($i = 1, 2$). On dit que (P, π_1, π_2) est un *produit* de V_1 et V_2 si et seulement si, pour tout morphisme $f_i : W \rightarrow V_i$ ($i = 1, 2$) il existe un unique morphisme $g : W \rightarrow P$ tel que $f_i = \pi_i \circ g$ ($i = 1, 2$). On rappelle que la catégorie $\mathcal{C}^{\text{op}}$ opposée à $\mathcal{C}$ possède les mêmes objets que $\mathcal{C}$, mais que $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(V_1, V_2) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V_2, V_1)$. Soit K un corps algébriquement clos.

1. Donner une bijection entre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, P) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V_2)$.
2. Montrer que P , s'il existe, est unique à isomorphisme près.
3. Soient n et m des entiers ≥ 1 avec $m > n$. Soient I et J des idéaux de $K[X_1, \dots, X_n]$ et $K[X_{n+1}, \dots, X_m]$ respectivement. On considère $K[X_1, \dots, X_n]$ et $K[X_{n+1}, \dots, X_m]$ comme des sous- K -algèbres de $K[X_1, \dots, X_m]$. Notons (I, J) l'idéal de $K[X_1, \dots, X_m]$ engendré par $I \cup J$. Montrer que $K[X_1, \dots, X_n]/I \otimes_K K[X_{n+1}, \dots, X_m]/J$ et $K[X_1, \dots, X_m]/(I, J)$ sont des K -algèbres isomorphes (par $F \otimes G \mapsto$ la classe de FG dans $K[X_1, \dots, X_m]/(I, J)$).
4. Soient A_1, A_2 des K -algèbres. Notons $\pi_i : A_i \rightarrow A_1 \otimes_K A_2$ qui à a_i associe $a_1 \otimes 1$ si $i = 1$ et $1 \otimes a_2$ si $i = 2$. C'est un morphisme $A_1 \otimes_K A_2 \rightarrow A_i$ dans la catégorie opposée à la catégorie des K -algèbres. Montrer que $(A_1 \otimes_K A_2, \pi_1, \pi_2)$ est un produit dans la catégorie opposée à la catégorie des K -algèbres.
5. Montrer que si A_1 et A_2 sont réduites, alors $A_1 \otimes_K A_2$ est une K -algèbre réduite.
6. Soit L un corps de caractéristique $p > 0$. Posons $M = L[X, Y]/(Y^p - X)$. Notons y l'image de Y dans M . Calculer $(1 \otimes y - y \otimes 1)^p$ dans $M \otimes_{L(X)} M$.
7. L'algèbre $M \otimes_{L(X)} M$ est-elle réduite ?
8. Montrer que si A_1 et A_2 sont intègres, alors $A_1 \otimes_K A_2$ est une K -algèbre intègre.
9. Soient $(V_1, \mathcal{O}_{V_1})$ et $(V_2, \mathcal{O}_{V_2})$ des variétés algébriques affines sur K . Montrer qu'il existe un produit, noté $V_1 \times V_2$ de V_1 et V_2 dans la catégorie des variétés algébriques affines.
10. Supposons V_1 et V_2 irréductibles. Montrer que $V_1 \times V_2$ est irréductible.
11. Soit T une variété algébrique. Montrer qu'une application $\phi : T \rightarrow V_1 \times V_2$ est régulière si et seulement si $\pi_i \circ \phi$ est régulière ($i = 1, 2$).

II

Soit G un groupe fini. Soit p un nombre premier. On rappelle qu'un p -groupe est un groupe fini d'ordre une puissance de p . Un p -sous-groupe de Sylow de G est un sous-groupe de G qui est un p -groupe et d'indice premier à p dans G . On rappelle qu'un p -sous-groupe de Sylow de G existe et est unique à conjugaison près. Soit S un p -sous-groupe de Sylow de G . Soit M un G -module. Si A est un groupe abélien, on note $A_{(p)}$ sa *composante p -primaire*, c'est-à-dire le sous-groupe formé par ses éléments d'ordre une puissance de p . Soit i un entier > 0 .

Notons $\mathcal{S}_n$ le groupe alterné sur n lettres. Notons $\mathcal{A}_n$ son sous-groupe alterné. Notons $\mathbf{F}_2$ un corps à deux éléments. Le groupe $\mathbf{F}_2^2$ est un $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ -module, et donc un $\mathcal{S}_3$ -module (car $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ opère sur les trois vecteurs non nuls de $\mathbf{F}_2^2$).

1. Montrer qu'on a la décomposition $H^i(G, M) \simeq \bigoplus_p H^i(G, M)_{(p)}$.
2. Supposons que G est un p -groupe. Supposons que M est un groupe de type fini. Montrer que $H^i(G, M)$ est un p -groupe.
3. Soient S_1 et S_2 deux p -sous-groupes de Sylow de G . Montrer que les groupes $H^i(S_1, M)$ et $H^i(S_2, M)$ sont isomorphes.
4. Considérons l'application composée $\phi_p : H^i(G, M)_{(p)} \rightarrow H^i(G, M) \rightarrow H^i(S, M)$, où la deuxième flèche est la restriction à S . Montrer que ϕ_p est une application injective.
5. Soit $c \in H^i(S, M)$. Pour $g \in G$, notons $gc \in H^i(gSg^{-1}, M)$ déduit de la conjugaison par g . On dit que c est *invariant par conjugaison* si, pour tout $g \in G$, les restrictions à $H^i(gSg^{-1} \cap S, M)$ de c et gc sont identiques. On note $H^i(S, M)'$ le sous-groupe des éléments invariants par conjugaison de $H^i(S, M)$. Montrer que l'image de ϕ_p est contenue dans $H^i(S, M)'$.
6. Supposons S normal dans G . Montrer que l'image de l'application ϕ_p est contenue dans $H^i(S, M)$.
7. Déterminer $H^i(\mathcal{A}_3, \mathbf{F}_2^2)$.
8. Le groupe $H^i(\mathcal{S}_3, \mathbf{F}_2^2)$ possède-t-il des éléments d'ordre 3 ?
9. Soit C un sous-groupe d'ordre 2 de $\mathcal{S}_3$. Déterminer $H^i(C, \mathbf{F}_2^2)$.
10. Montrer qu'on a une extension $1 \rightarrow \mathbf{F}_2^2 \rightarrow \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}_3 \rightarrow 1$.
11. La classe correspondante dans $H^2(\mathcal{S}_3, \mathbf{F}_2^2)$ est-elle nulle ?