

EXAMEN du 12 mai 2024

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées. Les parties sont indépendantes.

I

Soit A un anneau commutatif. Soit M un A -module libre de rang fini. On pose $\Lambda^0 M = A$. Soit k un entier ≥ 1 . On note $\Lambda^k M$ le quotient de $M^{\otimes_A k}$ par le sous- A -module engendré par $\{e_1 \otimes_A e_2 \dots \otimes_A e_k, \text{ avec } e_1, e_2, \dots, e_k \in M \text{ et } e_i = e_j \text{ pour au moins un couple } (i, j)\}$. On note $e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_k$ l'image de $e_1 \otimes_A e_2 \dots \otimes_A e_k$ dans $\Lambda^k M$. On pose $\Lambda^* M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i M$, munie de la loi $\wedge$, c'est l'*algèbre extérieure* de M . C'est une algèbre graduée.

Soit $s : M \rightarrow A$ un morphisme de A -modules.

1. Montrer que $\Lambda^k M$ est un A -module libre.
2. Montrer qu'on a les relations $x \wedge y = (-1)^{kl} y \wedge x$, pour $x \in \Lambda^k M$ et $y \in \Lambda^l M$.
3. Montrer qu'il existe un unique morphisme de A -modules gradués $d : \Lambda^* M \rightarrow \Lambda^* M$ de degré -1 tel que $d_1 = s$ (où on note $d_k = d|_{\Lambda^k M}$) et $d(x \wedge y) = x \wedge dy + (-1)^k dx \wedge y$, pour $x \in \Lambda^k M$ et $y \in \Lambda^l M$.
4. Montrer qu'on a $d_k(v_1 \wedge v_2 \dots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i s(v_i) v_1 \wedge v_2 \dots \wedge \widehat{v_i} \wedge \dots \wedge v_k$.
5. Supposons que M soit libre de rang n sur A . Montrer que d définit un complexe $K_{\bullet}(s)$ (le *complexe de Koszul*) : $0 \rightarrow \Lambda^n M \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^1 M = M \rightarrow A \rightarrow 0$.
6. Soit K un corps. Posons $A = K[X_1, X_2]$, $M = A^2$. Considérons $s : A^2 \rightarrow A$ donné par $s(P_1, P_2) = X_1 P_1 + X_2 P_2$. Déterminer l'homologie du complexe $K_{\bullet}(s)$.
7. On munit K d'une structure de $K[X_1, X_2]$ -module ainsi : $P(X_1, X_2) \in A$ agit sur $a \in K$ par $(P, a) \mapsto P(0, 0)a$. Donner une résolution libre de K comme $K[X_1, X_2]$ -module.

II

Soit K un corps. Soit n un entier ≥ 1 . Soit G un groupe. On pose $\mathrm{PGL}_n(K) = \mathrm{PGL}(K^n)$ le *groupe projectif linéaire*. Soit $\bar{\rho} : G \rightarrow \mathrm{PGL}_n(K)$ un morphisme de groupe (une *représentation projective*). On dit que $\bar{\rho}$ admet un *relèvement* à $\mathrm{GL}_n(K)$ s'il existe un morphisme de groupe $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ qui se factorise par $\bar{\rho}$.

1. Montrer que la suite exacte $1 \rightarrow K^{\times} \rightarrow \mathrm{GL}_n(K) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(K) \rightarrow 1$ donne lieu à une classe γ dans le groupe $H^2(\mathrm{PGL}_n(K), K^{\times})$, pour l'action triviale de $\mathrm{PGL}_n(K)$ sur $K^{\times}$.
2. Donner un exemple pour n et K avec γ non nul.
3. En déduire qu'il existe une classe $\bar{\rho}^*(\gamma) \in H^2(G, K^{\times})$.
4. Quelle est l'extension de G par $K^{\times}$ associée à $\bar{\rho}^*(\gamma)$?
5. Montrer que $\bar{\rho}^*(\gamma) = 0$ si et seulement s'il existe un relèvement de $\bar{\rho}$ à $\mathrm{GL}_n(K)$.

6. Supposons G cyclique d'ordre d et que $K^\times$ est un corps fini à q éléments. Décrire explicitement $H^2(G, K^\times)$.
7. Montrer que si d et $q - 1$ sont premiers entre eux, $\bar{\rho}$ admet un relèvement à $GL_n(K)$.
8. Donner un exemple, avec G cyclique, où $\bar{\rho}$ n'admet pas de relèvement.

III

Soit X une variété algébrique affine. Notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural de X .

Un $\mathcal{O}_X$ -module est un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur X tel que pour tout ouvert U de X , $\mathcal{F}(U)$ soit un module sur l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$, avec compatibilité avec les applications de restriction $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, si V est un ouvert contenu dans U .

Un *morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules* est un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que pour tout ouvert U de X , le morphisme de groupes $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ soit un morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules.

On dit qu'un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ est *quasi-cohérent* si X peut être recouvert par une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $\mathcal{F}(U_i)$ est isomorphe à $\tilde{M}_i$ (voir question 1.), pour M_i un $\mathcal{O}_X(U_i)$ -module. .

Pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et M un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module, on note M_f le localisé en f de M (c'est le quotient de M par l'ensemble multiplicatif $\{f^n/n \in \mathbf{N}\}$). On note $D(f) = \{x \in X/f(x) \neq 0\}$ l'ouvert standard.

1. Soit M un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module. Montrer qu'il existe un unique $\mathcal{O}_X$ -module, noté $\tilde{M}$, sur X tel que $\tilde{M}(D(f)) = M_f$, pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.
2. Montrer que le noyau d'un morphisme f de $\mathcal{O}_X$ -modules est un $\mathcal{O}_X$ -module. Il est noté $Ker(f)$.
3. Montrer que l'image d'un morphisme f de $\mathcal{O}_X$ -modules est un préfaisceau, et que le faisceau associé est un $\mathcal{O}_X$ -module, noté $Im(f)$.
4. Montrer que $M \mapsto \tilde{M}$ est un foncteur de la catégorie des $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -modules vers la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules.
5. Montrer qu'une suite de $\mathcal{O}_X(X)$ -module $L \rightarrow M \rightarrow N$ est exacte si et seulement si la suite $\tilde{L} \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ est exacte (ici exacte signifie que l'image du premier morphisme est le noyau du second morphisme, avec les notions de noyau et d'image ci-dessus).
6. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. Soit $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Montrer que l'application canonique $\Gamma(X, \mathcal{F})_f \rightarrow \mathcal{F}(D(f))$ est un isomorphisme.
7. En déduire qu'il existe un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module M tel que $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\tilde{M}$.
8. Quelle équivalence de catégories a été établie ?