Université Paris Cité
Master de Mathématiques

Topologie algébrique
Année 2023-24

CONTRÔLE du 30 janvier 2024 – Durée : 1h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits.

1. L'ensemble constitué de $\emptyset$, $\mathbf{R}^2$ et des boules fermées centrées en 0 est-il une topologie de $\mathbf{R}^2$?
2. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, muni de la topologie dont les ouverts sont : $\emptyset$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_3\}$, X. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dont les classes sont $\{x_1, x_2\}$ et $\{x_3, x_4\}$. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. Donner la liste des ouverts de $X/\mathcal{R}$.
3. Avec les notations de la question précédente, la surjection canonique $X \to X/\mathcal{R}$ est-elle ouverte ?
4. Donner un exemple de sous-ensemble dénombrable A de $\mathbf{R}^2$ et dont l'ensemble des points d'accumulation dans $\mathbf{R}^2$ est $\mathbf{R}^2$.
5. Dire comment identifier $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ à un quotient de la sphère $\mathbf{S}^2$.
6. Montrer que l'application $z \mapsto z^2$ dans $\mathbf{C}$ permet d'identifier $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ au cercle $\mathbf{S}^1$.
7. L'ensemble $\mathbf{Q} \times \mathbf{R} \cup \mathbf{R} \times \mathbf{Q}$ est-il connexe par arcs ?
8. Montrer que $\{z \in \mathbf{C}/0 < |z| < 1\}$ et $\{z \in \mathbf{C}/|z| > 1\}$ sont des ouverts de $\mathbf{C}$ qui sont homéomorphes.
9. Donner un exemple d'espace topologique X recouvert par une famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ et d'une application $f : X \to Y$ non continue avec $f_{|F_i}$ continue.
10. Soit X un espace topologique séparé. Soient K_1 et K_2 des compacts disjoints de X. Montrer qu'ils sont séparés (*i.e.* il existe des ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $K_1 \subset U_1$ et $K_2 \subset U_2$).