Université Paris Cité
Master de Mathématiques

Topologie algébrique
Année 2023-24

**CONTRÔLE du 13 février 2024 – Durée : 1h**

*Tout appareil électronique et tout document sont interdits.*

1. Donner un exemple d'espaces topologiques $X$ et $Y$ non homéomorphes mais homotopiquement équivalents.
2. Soit $n$ un entier $\geq 1$. Montrer que $\mathbf{R}^n$ est homéomorphe à un compact de $\mathbf{R}^{n+1}$ privé d'un point.
3. Donner un exemple d'espaces topologiques $X$ et $Y$, et d'une application continue surjective $f : X \to Y$, avec $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ non surjective.
4. Les espaces topologiques $\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}^1$ sont-ils homéomorphes ?
5. Les espaces topologiques $\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}^3$ sont-ils homéomorphes ?
6. Montrer que l'espace projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ est homotopiquement équivalent à $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ privé d'un point.
7. Considérons $\mathcal{C}$ un cercle du plan et $P$ un point de $\mathcal{C}$. Le point $P$ est-il un rétract par déformation de $\mathcal{C}$ ?
8. Donner un exemple d'espace topologique de groupe fondamental non-abélien.
9. Donner une action continue et transitive du groupe orthogonal $O(n)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$.
10. Quels sont les ouverts simplement connexes de $(\mathbf{R} - \mathbf{Q})^2$ ?