Feuille 6 — Catégories, revêtements, théorème de Van Kampen

Théorème de Van Kampen et applications

1. Déterminer les groupes fondamentaux du tore, de la bouteille de Klein et du ruban de Moëbius, puis de ces espaces privés d'un point.

2. Considérons l'espace topologique C formé par les arêtes d'un cube de $\mathbf{R}^3$. On pourra le considérer comme un graphe non orienté à 12 arêtes et 8 sommets.
2.a. Dessiner un arbre maximal A sur ce graphe. On vérifiera qu'il est composé de 7 arêtes et que son groupe fondamental est trivial. Notons B l'ensemble des arêtes qui ne sont pas dans A.
2.b. Montrer que le groupe fondamental de $A \cup B$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.
2.c. En déduire que le groupe fondamental de C est libre sur 5 générateurs.
2.d. Déterminer par la même méthode le groupe fondamental des espaces topologiques formés par les arêtes d'un tétraèdre régulier, d'un octaèdre régulier, des coutures d'un ballon de football etc.

3.a. Soit U un ouvert convexe non vide de $\mathbf{R}^2$. Montrer par récurrence sur n que le groupe fondamental de U privé de n points est libre sur n générateurs.
3.b. Montrer que le groupe fondamental de $\mathbf{S}^2$ privé de n points est un groupe libre sur $n-1$ générateurs.
3.c. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3$ privé de n droites deux à deux distinctes passant toutes par l'origine ?
3.d. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privé de n points ?

4.a. Montrer que le groupe fondamental de $\mathbf{S}^n$, la sphère de dimension n, est trivial pour $n \geq 2$.
4.b. Calculer le groupe fondamental de la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, pour $n \geq 2$.

5.a. Déterminer le groupe fondamental du tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ (faire un dessin).
5.b. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ privé d'un point.
5.c. La droite projective complexe privée de trois points est-elle homéomorphe au tore privé d'un point ? (Ôter un lacet bien choisi au tore, de telle sorte qu'il reste simplement connexe.)

6. On va montrer par récurrence sur n, entier ≥ 3, que le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(n)$ est un groupe à deux éléments. Le cas $n = 3$ est traité ci-dessus. Notons $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$. Soit $x_0 \in \mathbf{S}^{n-1}$. Notons G le stabilisateur de x_0 dans $\mathrm{SO}(n)$. Pour x, $y \in \mathbf{S}^{n-1}$, $x \notin \{y, -y\}$, posons, pour $z \in \mathbf{R}^n$, $\alpha_x^y(z) = \frac{\langle x,z\rangle - \langle x,y\rangle\langle z,y\rangle}{1-\langle x,y\rangle^2}$, et $r_x^y(z) = z - \alpha_y^x(z)(x + y - 2\langle x, y\rangle x) + \alpha_y^x(x)(x - y)$.
6.a. Montrer que G est un groupe topologique isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$.
6.b. Montrer que α_x^y est bien défini. Montrer que si z est orthogonal à x et y, on a $r_x^y(z) = z$. En déduire que le plan vectoriel engendré par x et y est stable par r_x^y. Montrer que $r_x^y(y) = x$ et $r_x^y(x) = -y + 2\langle x, y >$. En déduire que $r_x^y \in \mathrm{SO}(n)$. Montrer que r_x^y tend vers 1 lorsque x tend vers y ou $-y$. On pose donc $r_x^x = r_x^{-x} = 1$.
6.c. Soit $\pi : \mathrm{SO}(n) \to \mathbf{S}^{n-1}$ donnée par $\pi(f) = f(x_0)$. Pour $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, posons $U_x = \mathbf{S}^{n-1} - x$ et $V_x = \pi^{-1}(U_x)$. Montrer que pour $x \neq x_0$, $f \mapsto (\pi(f), r_{-x}^{x_0} \circ r_{f(x_0)}^x \circ f)$ définit un homéomorphisme $V_x \to U_x \times G$, dont on donnera l'inverse.
6.d. Soit $x_1 \in \mathbf{S}^{n-1} - \{x_0, -x_0\}$. Montrer que le groupe fondamental de V_{x_1} est d'ordre 2. Montrer que l'inclusion $V_{x_1} \cap V_{-x_1} \subset V_{x_1}$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.
6.e. Appliquer le théorème de van Kampen avec les ouverts V_{x_1} et V_{-x_1} pour montrer que l'inclusion $V_{x_1} \subset \mathrm{SO}(n)$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.

Groupe fondamental et revêtement

7. Soit $\pi : E \to X$ un revêtement de fibre F finie, non vide. Montrer que E est compact si et seulement si X est compact.

8. Soit n un entier ≥ 1. Considérons l'action du groupe $\{-1, 1\}$ sur la sphère $\mathbf{S}^n$.

8.a. Montrer que l'action est proprement discontinue.
8.b. Montrer qu'on a un revêtement $\mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$?

9. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que l'action de $\mathbf{Z}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ est proprement discontinue. En déduire le groupe fondamental de $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$.

10. On rappelle qu'un espace topologique X est dit *contractile* si et seulement si X est homotopiquement équivalent à un point.
10.a. Soit X un espace topologique. Montrer qu'il est contractile si et seulement si toute application continue $X \to Y$ (resp. $Y \to X$) est homotope à une fonction constante.
10.b. Montrer que la sphère $\mathbf{S}^2$ n'est pas contractile (mais est simplement connexe).

11. Soit X un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et de groupe fondamental fini. Soit f une application continue $X \to \mathbf{S}^1$. On rappelle qu'on a un foncteur π_1 de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes données par le groupe fondamental. Ainsi, si on fixe un point-base x_0 de X, on a un morphisme de groupes $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(\mathbf{S}^1, f(x_0))$.
11.a. Montrer que $\pi_1(f)$ (qu'on peut aussi noter f_*) est constante.
11.b. Montrer que f est homotope à une fonction constante.

12. Soit ϕ un automorphisme d'un revêtement $\pi : E \to X$. Soit $* \in X$. Considérons le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes de π. Il est formé des homéomorphismes $E \to E$ qui commutent à π.
12.a. Rappeler comment le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ opère sur la fibre $\pi^{-1}(*)$ de $*$.
12.b. Montrer que ϕ induit une bijection $\pi^{-1}(*) \to \pi^{-1}(*)$ et vérifie $\phi(a.\sigma) = \phi(a).\sigma$ ($a \in \pi^{-1}(*)$, $\sigma \in \pi_1(X, *)$). On dit que ϕ est $\pi_1(X, *)$-*équivariante*. Notons $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,*)}(\pi^{-1}(*))$ le groupe des automorphismes $\pi_1(X, *)$-équivariants de $\pi^{-1}(*)$.
12.c. Supposons E non vide (ce n'est pas essentiel). Montrer que la fibre de $*$ est non-vide.
12.d. Montrer qu'on a un morphisme injectif de groupes $r : \mathrm{Aut}(\pi) \to \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,*)}(\pi^{-1}(*))$.
12.e. Supposons désormais E et X connexes et localement connexes par arcs. Montrer que r est surjectif.

13. Soit $\phi : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques pointés.
13.a. Donner un exemple de telle application telle que l'application ϕ_* (qu'on peut aussi noter $\pi_1(\phi)$) qui s'en déduit sur les groupes fondamentaux ne soit pas injective.
13.b. Montrer que ϕ_* est injective si ϕ est un revêtement.

14.a. Montrer que groupe des automorphismes du revêtement $\mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.
14.b. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que le groupe des automorphisme du revêtement $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui à x associe nx est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

15. Soit $\phi : E \to B$ un revêtement. Il est dit *galoisien* si E est connexe et le groupe $\mathrm{Aut}(\phi)$ des automorphismes de ϕ opère transitivement sur chaque fibre de ϕ.
15.a. Montrer que dans ce cas, on a un homéomorphisme $E/\mathrm{Aut}(\phi) \to B$.
15.b. Soit G un groupe discret opérant librement et proprement sur E, que l'on suppose ici connexe et localement compact. Montrer qu'on a un revêtement galoisien $\phi : E/G \to B$.
15.c. Comparer à la théorie de Galois pour les extensions de corps.

16. On rappelle que $\mathbf{C}$ est un espace topologique isomorphe à $\mathbf{R}^2$. On le plonge dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par $z \mapsto (z, 1)$. Son image a pour complémentaire le point ∞, dont une base de voisinages est formée par les complémentaires des boules. On a un homémorphisme $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{S}^2$ qui justifie l'appellation *sphère de Riemann.*
16.a. Soit n un entier ≥ 2. L'application $z \mapsto z^n$ est-elle un revêtement $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$? De $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$?
16.b. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. À quelle condition $z \mapsto P(z)$ est-il un revêtement de $\mathbf{C}$?
16.c. On prolonge P en une fonction $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, par $P(\infty) = \infty$. À quelle condition est-ce un revêtement de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$?
16.d. Soit F une fraction rationnelle de $\mathbf{C}(X)$. Montrer qu'elle définit une application continue $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. À quelle condition est-ce un revêtement ?
16.e. L'application $z \mapsto e^z$ est-elle un revêtement $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$?