Université Paris Cité Année 2023-24
M1 mathématiques – Topologie algébrique L. Merel

Feuille 3 — Espaces cellulaires et actions de groupes

Espaces cellulaires

1. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $[0,1]^2$ dont les classes sont $\{(x,0),(x,1)\}$, pour $x \in [0,1]$, et $\{(0,y),(1,y)\}$, pour $y \in [0,1]$. Montrer que $[0,1]^2/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, et à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Indiquer comment $[0,1]^2/\mathcal{R}$ est muni d'une structure d'espace cellulaire.

2. Soit n un entier ≥ 0. Indiquer une structure d'espace cellulaire de $\mathbf{S}^n$.

3. Posons $D = \{(x,y,0) \in \mathbf{R}^3 / x^2+y^2 \leq 1\}$ et $A = \{(0,0,z) \in \mathbf{R}^3 / z^2 \leq 1\}$. Décrire des structures d'espace cellulaire de $\mathbf{S}^2 \cup A$, $\mathbf{S}^2 \cup D$ et $\mathbf{S}^2 \cup D \cup A$.

4. Soit n un entier ≥ 0. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^n$ dont les classes sont $\{x,-x\}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Restreinte à la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$, c'est la relation *antipodale*.
4.a. Montrer que l'espace projectif réel $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^n/\mathcal{R}$.
4.b. Notons $\mathbf{S}^n_+ = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbf{S}^n / x_n > 0\}$ (la *demi-sphère*). Montrer que le bord de $\mathbf{S}^n_+$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1}$. Montrer que $\mathbf{S}^n_+/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^n/\mathcal{R}$.
4.c. Décrire une structure d'espace cellulaire de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.

5. Soit n un entier ≥ 0. La sphère (resp. boule) unité de $\mathbf{C}^{n+1}$, notée par abus $\mathbf{S}^{2n+1}$ (resp. $\mathbf{B}^{2n+2}$) est $\{(z_1,...,z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} / |z_1|^2+...+|z_{n+1}|^2 = 1\}$ (resp. $\{(z_1,...,z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} / |z_1|^2+...+|z_{n+1}|^2 \leq 1\}$). On munit $\mathbf{S}^{2n+1}$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ telle que $(z_1,...,z_{n+1})\mathcal{R}(\lambda z_1,...,\lambda z_{n+1})$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$. Soit $f : \mathbf{B}^{2n+2} \to \mathbf{R}_+$ qui à $(z_1,...,z_{n+1})$ associe $\sqrt{1-(|z_1|^2+...+|z_{n+1}|^2)}$.
5.a. Montrer que cette sphère unité est homéomorphe à la sphère usuelle $\mathbf{S}^{2n+1}$.
5.b. Montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{2n+1}/\mathcal{R}$.
5.c. Montrer que $\mathbf{S}^{2n+1}/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{B}^{2n}$.
5.d. En déduire une structure d'espace cellulaire de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

6. Soit $X = \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^2$ le bouquet d'un cercle et d'une sphère. Indiquer une structure d'espace cellulaire pour X, puis pour $C(X)$ et $S(X)$.

7. Soient X et Y deux espaces cellulaires de dimensions finies. Donner une structure d'espace cellulaire à $X \times Y$ et au bouquet $X \vee Y$.

8. Soit X un espace cellulaire. Soit A un sous-espace cellulaire de X. Montrer que X/A, $C(X)$ et $S(X)$ ont des structures d'espace cellulaire.

9. Montrer que $\{1/n / n \in \mathbf{Z}, n > 0\} \cup \{0\}$ n'est pas homéomorphe à un espace cellulaire.

10.a. Montrer que $\mathbf{R}$ est un espace cellulaire dont les cellules sont de dimensions 0 et 1.
10.b. Soit n un entier ≥ 0. En déduire que $\mathbf{R}^n$ est un espace cellulaire.

11. Considérons l'espace topologique X (le *parachute*) obtenu en recollant les trois sommets du simplexe Δ_2. Montrer que X est muni d'une structure d'espace cellulaire.

12. La *bouteille de Klein* (resp. le *ruban de Moebius*) est l'espace $[0,1]^2$ modulo la relation d'équivalence dont les classes sont $\{(0,y),(1,y)\}$ $(0 \leq y \leq 1)$ et $\{(x,0),(1-x,1)\}$ $(0 \leq x \leq 1)$ (resp. les classes sont $\{(x,0),(1-x,1)\}$ $(0 \leq x \leq 1)$). Montrer que ces espaces sont munis d'une structure d'espace cellulaire.

Actions de groupes

13. Soit n un entier ≥ 1. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$.

14. Soit n un entier ≥ 1. L'*espace unitaire tangent* à la sphère $\mathbf{S}^n$ est l'ensemble des $(x,y) \in \mathbf{S}^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ avec y unitaire orthogonal à x. On le note $T(\mathbf{S}^n)$. Montrer que $T(\mathbf{S}^2)$ est homéomorphe à $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$.

15. Notons $\mathcal{R}$ la relation antipodale sur la sphère $\mathbf{S}^2$. On considère cette sphère comme le bord de $\mathbf{B}^3$. On étend $\mathcal{R}$ à $\mathbf{B}^3$, en imposant que les classes d'équivalence dans $\mathbf{B}^3 - \mathbf{S}^2$ sont les singletons.

15.a. Montrer que $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{B}^3/\mathcal{R}$.
15.b. En considérant une application continue $\mathbf{B}^3 \to \mathrm{SO}(3)$, montrer que $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$.

16. Soit G un groupe topologique séparé. Notons e son élément neutre. Soit H un sous-groupe discret de G. Notons q la surjection canonique $G \to G/H$.
16.a. Montrer qu'il existe deux voisinages V et W de e tels que $W \cap H = \{e\}$, $V = V^{-1}$, et $V.V^{-1} \subset W$. En déduire que, pour h, $h' \in H$, $h \neq h'$, on a $hV \cap h'V = \emptyset$.
16.b. Montrer que H est fermé dans G. En déduire que G/H est un espace topologique séparé.
16.c. Supposons H distingué dans G. Montrer que, lorsque G est connexe, tout élément de H commute à tout élément de G. En déduire que H est commutatif.
16.d. Supposons H distingué dans G. Montrer qu'il existe un voisinage U de l'élément neutre $\bar{e}$ de G/H, une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts deux à deux disjoints de G tels que $q^{-1}(U) = \cup_{i\in I} U_i$, et, pour tout $i \in$, $q_{|U_i}$ est un homéomorphisme $U_i \to U$. Même question en remplaçant $\bar{e}$ par un élément quelconque g de G/H.

17. Soient k et n des entiers ≥ 1, avec $n \geq k$. On identifie le groupe $\mathrm{O}(n-k)$ (resp. $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$) à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ par l'application $M \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ (resp. $(M, N) \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$).
17.a. Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$.
17.b. Établir des homéomorphismes $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \to \mathbf{S}^{n-1}$ et, pour $n \geq 2$, $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \to \mathbf{S}^{n-1}$.

18. Soient k et n des entiers ≥ 1, avec $n \geq k$. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, par exemple $\mathbf{R}^n$. La *variété de Stiefel* associée $V_{k,n}(\mathbf{R})$ est formée par les k-uplets $(a_1, ..., a_k) \in E^k$ de vecteurs unitaires, deux-à-deux orthogonaux. Montrer que $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur $V_{k,n}$, puis qu'on a des homéomorphismes $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k) \to V_{k,n}(\mathbf{R})$ et, pour $n > k$, $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k) \to V_{k,n}(\mathbf{R})$.

19. Soient k et n des entiers ≥ 1, avec $n \geq k$. On note $\mathrm{Gr}_{k,n}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbf{R}^n$. C'est la *variété de Grassmann* ou *grassmannienne* réelle. On la munit de la topologie quotient issue de l'application $V_{k,n}(\mathbf{R}) \to \mathrm{Gr}_{k,n}$ qui à un k-uplet associe l'espace engendrée par ce k-uplet.
19.a. Soit $a \in \mathbf{R}^n$. Montrer que l'application $V_{k,n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ qui à $(v_1, ..., v_k)$ associe $\min\{d(a,x)^2/x \in \mathbf{R}v_1 + ... + \mathbf{R}v_k\}$ est continue. En déduire que $\mathrm{Gr}_{k,n}$ est un espace toplogique séparé.
19.b. Montrer qu'on a un homéomorphisme $\mathrm{Gr}_{k,n} \simeq \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k))$.
19.c. Montrer que l'application qui à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ associe son orthogonal définit un homéomorphisme $\mathrm{Gr}_{k,n} \to \mathrm{Gr}_{n-k,n}$.

20. Posons $\mathbf{H} = \{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C})/a, b \in \mathbf{C}\}$ (les *quaternions*). Soit $m = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$. On pose $\bar{m} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$, $||m|| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$, $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
20.a. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de dimension 4 de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ de base $(1, I, J, K)$ et que c'est une sous-algèbre de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$.
20.b. Montrer qu'on a $m\bar{m} = ||m||^2 1$. En déduire que $\mathbf{H}$ est un corps. Montrer que le centre de $\mathbf{H}$ (c'est-à-dire l'ensemble de ses éléments qui commutent à tout $\mathbf{H}$) est le sous-corps $\mathbf{R}1$ (identifié à $\mathbf{R}$).
20.c. Montrer que $||.||$ est une norme euclidienne sur $\mathbf{H}$, et une norme de l'anneau $\mathbf{H}$. Montrer que la sphère $\mathbf{S}(\mathbf{H})$ de rayon 1 de $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathbf{H}^*$. Donner une bijection $\mathbf{S}(\mathbf{H}) \simeq \mathrm{SU}(2)$.
20.d. On pose $P = \{xI + yJ + zK/(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$ (ensemble des *quaternions purs*). Montrer que P est stable par conjugaison par $\mathbf{H}^*$. En déduire un isomorphisme de groupes $\mathbf{H}^*/\mathbf{R}^* \simeq \mathrm{SU}(2)/\{-1, 1\}$.
20.e. Démontrer que la conjugaison par $m \in \mathbf{H}^*$ est une isométrie de P. En déduire un morphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ de noyau $\{-1, 1\}$.
20.f. Montrer que la conjugaison par $m \in \mathbf{H}^*$ se factorise par l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{H}) \simeq \mathbf{RP}^3$. En déduire une bijection $\mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \simeq \mathrm{SO}(3)$.
20.g. Soient m, $n \in \mathbf{H}^*$. Notons $\phi_{m,n} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ l'application donnée par $\phi(h) = mhn^{-1}$. En déduire qu'on a un morphisme surjectif de groupes $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ de noyau $\{(1, 1), (-1, -1)\}$.
20.h. Montrer que la bijection $\mathbf{S}(\mathbf{H}) \simeq \mathrm{SU}(2)$ est un homéomorphisme, que le morphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ est un revêtement double, que la bijection $\mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \simeq \mathrm{SO}(3)$ est un homéomorphisme, que le morphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ est un revêtement double.