Feuille 1 — Topologie générale

Un espace topologique est constitué d'un ensemble et d'une topologie sur cet ensemble. S'il n'y a pas d'ambiguïté, la topologie est implicite lorsqu'on écrit “Soit X un espace topologique”. Sauf mention particulière, pour n entier ≥ 0, $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ sont munis de la topologie issue de la distance euclidienne.

Isolement, accumulation

1. Soit m un entier ≥ 1. Montrer qu'un ouvert de $\mathbf{R}^m$ n'a pas de point isolé.

2. Soit n un entier > 0. Montrer que $F_n = \{p/q \in \mathbf{Q}/p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*, q \leq n\}$ est un fermé de $\mathbf{R}$ dont tous les points sont isolés.

3. Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$. Soit $a \in X$. Un *voisinage épointé* de a est un voisinage de a privé de a. Le point a est dit *d'accumulation dans* A si tout voisinage épointé de a rencontre A. Le *sous-ensemble dérivé* de A, noté $D(A)$ est l'ensemble des points d'accumulation de A.
3.a. Supposons X séparé, montrer que $D(A)$ est fermé et est form des points non-isolés de l'adhérence de A.
3.b. Pour $X = \mathbf{R}$ et $A = \{1/n, n \text{ entier} \geq 1\}$, calculer $\bar{A}$, $D(A)$, $D(D(A))$, $D(\bar{A})$.
3.c. Si $X = \{a, b, c\}$ est muni de la topologie $\{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$ et $A = \{a, c\}$, déterminer $D(A)$ et $D(\bar{A})$.
3.d. Supposons $X = \mathbf{C}$ et $A = \{(te^{it}/(t + 1)) \in \mathbf{C}/t \in \mathbf{R}_+\}$. Décrire l'intérieur, l'adhérence, la frontière, les points isolés de A et $D(A)$.
3.e. Mêmes questions pour $X = \mathbf{C}$ et $A = \{te^{it}/(t + 1) \in \mathbf{C}/t \in \mathbf{N}\}$.
3.f. Peut-on trouver X et A tels que la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $A_0 = A$ et, pour tout $n \geq 0$, $A_{n+1} = D(A_n)$, soit strictement décroissante ?

Séparabilité

4. Soit X un espace topologique. Soient A, $B \subset X$ disjoints. On dit que A et B sont *séparés* s'il existe des voisinages U et V de A et B respectivement tels que $U \cap V = \emptyset$. On a la hiérarchie de séparabilité suivante. L'espace X est dit T_0 (ou *Kolmogorov*) si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$ il existe un voisinage V de x tel que $y \notin V$ ou un voisinage V de y tel que $x \notin V$. Il est dit T_1 (ou *Fréchet*) si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$, il existe un voisinage V de x tel que $y \notin V$. Il est dit T_2 (ou *Hausdorff*, ou *séparé*) si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$, $\{x\}$ et $\{y\}$ sont séparés. Il est dit T_3 si pour tout $x \in X$, et tout fermé F de X, $x \notin F$, $\{x\}$ et F sont séparés. Il est dit T_4 si pour tous fermés E et F disjoints de X, E et F sont séparés.
4.a. Donner un exemple où X n'est pas T_0.
4.b. Montrer que tout espace T_1 est T_0. Donner un exemple d'espace T_0 qui n'est pas T_1.
4.c. Montrer que tout espace T_2 est T_1. Donner un exemple d'espace T_1 qui n'est pas T_2.
4.d. Si X est T_0 et T_3, il est dit *régulier*. Montrer qu'il est alors T_2.
4.e. Si X est T_1 et T_4, il est dit *normal*. Montrer qu'il est alors T_3.

5. Soit X un espace topologique séparé. Soient K_1, $K_2 \subset X$ compacts disjoints. Montrer qu'ils sont séparés.

6. Soient X et Y des espaces topologiques séparés. Montrer que $X \times Y$ est séparé.

7. Soit X un espace topologique. Montrer qu'il est séparé si et seulement si pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est l'intersection des voisinages fermés de x.

8. Soit X un espace topologique. Alors $X \times X$ est muni de la topologie produit. Montrer que X est séparé si et seulement si $\Delta = \{(x, x) \in X \times X/x \in X\}$ est fermé dans $X \times X$.

9. Soit X un espace métrique. Soient E et F des fermés disjoints de X.
9.a. Montrer qu'il existe $f : X \to \mathbf{R}$ continue telle que $f^{-1}(0) = E$ et $f^{-1}(1) = F$.
9.b. En déduire que X est normal.

10. Soit X un espace topologique. Soit R une relation d'équivalence sur X. On munit X/R l'ensemble quotient de la topologie quotient : celle pour laquelle les ouverts de X/R sont les parties U telles que $\cup_{u\in U} u$ est un ouvert de X. Supposons l'application $X \to X/R$ ouverte.

10.a. Montrer que l'application canonique $X \to X/R$ est continue.
10.b. Donner un exemple pour lequel X est séparé et X/R ne l'est pas.
10.c. Supposons X séparé. Montrer que X/R est séparé si et seulement si R est fermé dans $X \times X$.

Dénombrabilité

11. Soit X un espace topologique. On dit qu'il est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense. On dit qu'il est *à base dénombrable* s'il admet une base dénombrable d'ouverts. On dit qu'il est *à base dénombrable de voisinages* si tout $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages ouverts.
11.a. Supposons X à base dénombrable. Montrer que X est séparable et à base dénombrable de voisinages.
11.b. Supposons X métrique. Montrer que X est à base dénombrable de voisinages.
11.c. Si X est métrique, montrer qu'il est séparable si et seulement si il est à base dénombrable de voisinages.
11.d. Pour n entier ≥ 1, montrer que $\mathbf{R}^n$ est à base dénombrable.
11.e. Donner un exemple d'espace métrique non séparable.
11.f. Donner un exemple d'espace topologique séparable, mais pas à base dénombrable.

12. Une *prébase* d'un espace topologique X est une famille de parties qui engendre la topologie de X.
12.a. Montrer que X est à base dénombrable si et seulement si il admet une prébase dénombrable.
12.b. Supposons désormais X à base dénombrable. Soit $\mathcal{B}$ une base de la topologie de X. Soit $(U_j)_{j\in J}$ une famille de $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe $I \subset J$ dénombrable telle que $\cup_{j\in I} U_j = \cup_{j\in J} U_j$.
12.c. Montrer qu'il existe une sous-famille dénombrable de $\mathcal{B}$ qui engendre la topologie de X.
12.d. Est-ce encore vrai si on remplace $\mathcal{B}$ par une prébase $\mathcal{P}$?

13. On munit $\mathbf{R}$ de la topologie pour laquelle les fermés sont les ensembles finis et $\mathbf{R}$.
13.a. Quels axiomes de séparabilité et dénombrabilité sont alors satisfaits par $\mathbf{R}$?
13.b. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Soit $l \in \mathbf{R}$. Montrer que c'est une limite de $(x_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \neq l$, on a $\{n/x = x_n\}$ est fini.
13.c. Quel est l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

14.a. Montrer qu'on peut munir $\mathbf{R}$ de la topologie dont les ouverts sont : $\emptyset$, $\mathbf{R}$ et les demi-droites de la forme $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbf{R}$.
14.b. Quels axiomes de séparabilité et dénombrabilité sont satisfaits par cette topologie ?
14.c. Soit X un espace topologique. Soit $f : X \to \mathbf{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $x_0 \in X$, on a $\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ (*i.e.* f est semi-continue inférieurement pour la topologie habituelle).

15. Munissons $\mathbf{R}$ de la topologie engendrée par les segments fermés-ouverts, *i.e.* du type $[a, b[$, avec a, $b \in \mathbf{R}$.
15.a. Montrer que ces segments forment une base de cette topologie.
15.b. Montrer que cette topologie est plus fine (*i.e.* définit davantage d'ouverts) que la topologie usuelle.
15.c. Quels axiomes de séparabilité et de dénombrabilité satisfait cette topologie ?
15.d. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Montrer qu'elle converge vers une limite l si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $l \leq x_n \leq l + \epsilon$.

Connexité

16.a. Soit X un espace topologique. Soient A et B deux parties de X. Montrer que si A et B sont connexes et non-disjointes, $A \cup B$ est connexe (resp. connexe par arcs).
16.b. Montrer que si A est connexe et B vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.
16.c. Si A est connexe par arcs et B vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$, B est connexe par arcs.

17.a. Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$ non vide, ouvert, fermé et connexe. Montrer que c'est une composante connexe de X
17.b. Montrer que X est connexe si pour tout $B \subset X$, avec $B \neq \emptyset$, $B \neq X$, B admet une frontière non vide.

18.a. Quelles sont les composantes connexes des parties suivantes de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$: $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ et $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$?
18.b. L'ensemble $\mathbf{Q} \times \mathbf{R} \cup \mathbf{R} \times \mathbf{Q}$ est-il connexe par arcs ?

19. Soit n un entier ≥ 2. Posons $E_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n / x_1^2 + ... + x_{n-1}^n - x_n^2 \neq 0\}$.
19.a. Montrer que E_2 a quatre composantes connexes.

19.b. Montrer que E_3 a trois composantes connexes.
19.c. Montrer que $E_n^+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n / x_1^2 + ... + x_{n-1}^n - x_n^2 > 0\}$ est connexe par arc.

20.a. Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
20.b. Soient C_1 et C_2 deux cercles de $\mathbf{R}^2$. Montrer qu'ils sont homéomorphes.
20.c. Soit A une partie connexe d'un cercle C, $A \neq C$. Montrer que A n'est pas homéomorphe à C.

21. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$. On dit que A est *convexe* (resp. *étoilé autour d'un point*) si pour tous P, $Q \in A$ (resp. il existe $P \in A$ tel que pour tout $Q \in A$) le segment $[P, Q]$ est contenu dans A.
21.a. Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe.
21.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.
21.c. Montrer que tout convexe est connexe par arcs.
21.d. Donner un exemple d'ensemble étoilé autour d'un point qui n'est pas convexe. Montrer que tout ensemble étoilé autour d'un point est connexe par arcs.
21.e. Montrer que $E = \{(t, \sin(1/t)) \in \mathbf{R}^2 / t \in \mathbf{R}_+^\times\} \cup (\{0\} \times \mathbf{R})$ (la *sinusoïde du topologue*) est connexe. Est-il connexe par arcs ?

22. Un espace topologique X est dit *localement connexe* si tout $x \in X$ admet une base de voisinages connexes.
22.a. Montrer qu'alors, toute composante connexe est ouverte, puis que $\mathbf{Q}$ n'est pas localement connexe.
22.b. Montrer que tout ouvert d'un espace localement connexe est localement connexe.
22.c. Donner un exemple d'espace localement connexe qui n'est pas connexe.
22.d. Montrer que $P = (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup (\{1/n / n \in \mathbf{N}^\times\} \times \mathbf{R}) \cup (\{0\} \times \mathbf{R})$ (un *peigne*) est connexe mais pas localement connexe.
22.e. Donner un exemple d'espace topologique dans lequel tout point admet un voisinage connexe, mais qui n'est ni connexe, ni localement connexe.

Compacité

23. Le *diamètre* d'un espace métrique X est $\text{Sup}\{d(x, y)/x, y \in X\}$. On dit qu'un espace métrique est *borné* si l'ensemble $\{d(x, y)/x, y \in X\}$ est borné. Supposons X compact (ou, alternativement, séquentiellement compact). Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts recouvrant X. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.
23.a. Montrer que X est borné. Notons Δ son diamètre.
23.b. Soit $f : X \to]0, +\infty[$ telle que $f(x) = \text{Sup} \cup_{i \in I} \{r \in [0, \Delta]/B(x, r) \subset \Omega_i\}$. Montrer que f est 1-Lipschitzienne, *i.e.* on a, pour tous x, $y \in X$, $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.
23.c. En déduire qu'il existe $r > 0$ (le *nombre de Lebesgue* du recouvrement) tel que pour toute boule ouverte B de rayon r il existe $i \in I$ tel que $B \subset \Omega_i$. C'est le *lemme de Lebesgue*.

24. Soit (X, τ) un espace topologique non vide. Soit $\infty \notin X$. On considère sur $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ la famille de sous-ensembles $\hat{\tau}$ donnée par les ouverts U de X, et les complémentaires dans $\hat{X}$ des ensembles fermés et compacts dans X.
24.a. Montrer que $\hat{\tau}$ est une topologie sur $\hat{X}$.
24.b. Montrer que l'espace topologique $(\hat{X}, \hat{\tau})$ (dit *compactification d'Alexandroff*) est compact.

25. Un espace topologique est dit *séquentiellement compact* si toute suite admet une sous-suite convergente.
25.a. Montrer que tout espace métrique compact est séquentiellement compact. Quelle propriété des espaces métriques utilise-t-on ?
25.b. Montrer qu'un espace métrique séquentiellement compact est *totalement borné* (*i.e.* pour tout $\delta > 0$, X est recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon δ).
25.c. Déduire, à l'aide du lemme de Lebesgue, qu'un espace métrique séquentiellement compact est compact.

26. Soit X un espace topologique muni d'une prébase $\mathcal{P}$. Montrer que X est compact si et seulement si toute sous-famille de $\mathcal{P}$ qui recouvre X admet un sous-recouvrement fini (*théorème de compacité d'Alexander*).

27. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On munit le produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ de la topologie suivante. Les ouverts non vides de X sont les unions (finies ou infinies) d'ensembles de la forme $\prod_{i \in I} \Omega_i$, où $\Omega_i = X_i$ pour presque tout i (*i.e.* $\{i \in I / \Omega_i \neq X_i\}$ est fini). C'est la *topologie produit* (ou *de Tychonoff*).
27.a. Montrer que, pour tout $i \in I$, la projection $X \to X_i$ est continue.

27.b. Montrer que si X_i est compact pour tout $i \in I$, X est compact (*théorème de Tychonoff*). On pourra utiliser le théorème de compacité d'Alexander.
27.c. Soit $(x_n = (x_{n,i})_{i\in I})_{n\in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. Soit $x = (x_i)_{i\in I} \in X$. Montrer que la suite x_n tend vers x si et seulement si, pour tout $i \in I$, la suite $x_{n,i}$ tend vers x_i.
27.d. Supposons que $I = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et $X = \{0,1\}$. Pour $i \in I$, on note i_n son n-ème terme. Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans X définie par : $f_n(i) = i_n$. Soit $(f_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ une suite extraite de f qui converge dans X. Notons K l'image (dans $\mathbf{N}$) de la suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$. Soit $j \in I$ tel que $j_m = 0$ si $m \in 2K$, et $j_m = 0$ sinon. Déterminer la suite $(f_{n_k})(j)$ et montrer qu'elle ne converge pas dans X.
27.e. En déduire qu'il existe un espace topologique compact qui n'est pas séquentiellement compact.

28. Soient $X = \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ et $Y = \mathbf{Q}\times\{0\}$. Pour $\epsilon > 0$, $y = (q,0) \in Y$, posons $B(y,\epsilon) = \{(p,0) \in Y/|p-q| < \epsilon\}$. Pour $x = (p,q) \in X - Y$, notons T_x le triangle équilatéral de $\mathbf{R}^2$ dont les trois sommets sont x et deux points de $\mathbf{R}\times\{0\}$ (ces deux derniers ont pour coordonnées $(d(x),0)$ et $(g(x),0)$, où $d(x) = p + q/\sqrt{3}$ et $g(x) = p - q/\sqrt{3}$). On pose alors $B(x,\epsilon) = \{x\} \cup \{(s,0) \in Y/|s-d(x)| < \epsilon\} \cup \{(s,0) \in Y/|s-g(x)| < \epsilon\}$. La topologie sur X a pour base de voisinages de x les $B(x,\epsilon)$ lorsque ϵ parcourt les réels > 0.
28.a. Montrer que X est dénombrable.
28.b. Montrer que X est séparé.
28.c. Montrer que X est connexe.

Continuité

29. Montrer que l'image directe d'un espace topologique connexe par une application continue est connexe. L'image réciproque d'un connexe par une application continue est-elle connexe ?

30. Montrer que l'image réciproque d'un espace topologique séparé par une application continue est séparée. Est-ce vrai pour l'image directe ?

31. L'image réciproque d'un espace topologique compact par une application continue est-elle compacte ?

32. Soit X un espace topologique égal à une réunion finie $\cup_{i\in I} F_i$ de ses fermés. Soit $f : X \to Y$ une application, qui est continue sur F_i ($i \in I$). Montrer que f est continue. Est-ce vrai si I est infini ?

33. Soient E, F deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est *ouverte* lorsque, pour tout ouvert U de E, $f(U)$ est ouvert dans F.
33.a. Indiquer une application continue non ouverte et une application ouverte non continue.
33.b. Montrer que $f : E \to F$ est ouverte si et seulement si pour toute partie A de X, on a $f(A^o) \subset f(A)^o$.
33.c. Que peut-on dire d'une application $f : E \to F$ qui est à la fois bijective, continue et ouverte ?

34.a. Montrer que $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $x \mapsto x/(1 + ||x||)$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}^n$ vers une boule ouverte.
34.b. Notons $\mathbf{S}^1$ le cercle unité dans le plan complexe. Montrer que l'application $f : [0,1[\to \mathbf{S}^1$ qui à t associe $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ est bijective et continue. Est-ce un homéomorphisme ?
34.c. Montrer que $\{z \in \mathbf{C}/0 < |z| < 1\}$ et $\{z \in \mathbf{C}/|z| > 1\}$ sont des ouverts de $\mathbf{C}$ qui sont homéomorphes.

35. Soit X et Y des espaces topologiques, avec X compact et Y séparé. Soit $f : X \to Y$ continue.
35.a. Montrer que f est propre (*i.e.* l'image réciproque par f d'un compact est compacte).
35.b. Montrer que f est fermée (*i.e.* l'image par f d'un fermé est un fermé).
35.c. Montrer que si f est bijective, c'est un homéomorphisme.

36. Soient X et Y deux espaces topologiques. Notons $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues $X \to Y$. Pour $K \subset X$ compact et $U \subset Y$ ouvert, on note $V(K,U) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y)/f(K) \subset U\}$. Ces derniers ensembles forment une prébase d'une topologie sur $\mathcal{C}(X,Y)$. C'est la topologie *compacte-ouverte*.
36.a. Montrer que si X est un singleton, on retrouve la topologie de Y.
36.b. Montrer que si X est discret, on a $\mathcal{C}(X,Y) = Y^X$ et on retrouve la topologie produit sur Y^X.
36.c. Montrer que si Y est séparé, $\mathcal{C}(X,Y)$ est séparé.
36.d. Montrer que si Y est un espace métrique, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$ converge vers f si et seulement si elle converge vers f uniformément sur tout compact.
36.e. Pour X localement compact et séparé, montrer que $\mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$, $(f,x) \mapsto f(x)$ est continue.
36.f. Montrer que si X est compact et Y est métrique, muni d'une distance d, alors la topologie de $\mathcal{C}(X,Y)$ est issue d'une métrique D donnée par, pour f, $g \in \mathcal{C}(X,Y)$: $D(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x))/x \in X\}$.