Université de Sciences et Technologie de Chine
Classe sino-française
Année 2022-23

EXAMEN du 15 mai 2023

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées. Les parties sont indépendantes.

I

Soit A un anneau intègre. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. L'anneau A_a est l'anneau de fraction de A par le sous-ensemble multiplicatif $\{a^n | n \in \mathbf{N}\}$. On note F le corps des fractions de A.

On dit que A est un *anneau de Goldman* s'il existe $a \in A$ tel que A_a est un corps.

1. Montrer que si A est un anneau de Goldman, on a $A_a = F$.
2. Montrer que A est de Goldman si et seulement si F est une algèbre de type fini sur A (il existe x_1,..., $x_n \in F$ tels que $F = A[x_1, ..., x_n]$).
3. Supposons que A est un anneau de polynômes, *i.e.* $A = B[X]$, avec B anneau commutatif. Montrer que A n'est pas un anneau de Goldman.
4. Soit L un corps. Soit K un sous-corps de L. Soient $x \in L$ et $y \in K[x]$ tels que $K[x]_y = L$. Montrer que $L = K[x]$.
5. Supposons qu'il existe un anneau intègre A' et $a' \in A'$ tels que $A' = A[a']$. Notons F' le corps des fractions de A'. Supposons que A' est un anneau de Goldman. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que A_a est un corps, et F' est une extension finie de A_a.
6. Soit L un corps qui contient A comme sous-anneau, et tel que $L = A[x_1, ..., x_n]$, avec $x_1, ..., x_n \in L$. Montrer que A est un anneau de Goldman et que L est une extension finie de F. (C'est le *théorème de Zariski–Goldman–Krull.*)

II

Soit $G = \{1, c\}$ un groupe a deux éléments. On dit qu'un G-module M est *acyclique* si pour tout m, $m' \in M$ tel que $c.m = m$ et $c.m' = -m'$, il existe n, $n' \in M$ tel que $m = (1 + c).n$ et $m' = (1 - c).n'$. On note $M[2] = \{m \in M | 2.m = 0\}$. Pour $i \in \mathbf{Z}$, on note $\hat{H}^i(G, M)$ le i-ème groupe de cohomologie modifié de Tate.

1. Montrer que M est acyclique si et seulement si $\hat{H}^i(G, M) = 0$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.
2. Montrer que tout G-module libre est acyclique.
3. Tout module acyclique est-il libre ?
4. Tout module acyclique est-il projectif ?
5. Tout module projectif est-il acyclique ?
6. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de G-modules. Montrer que si M et M' (resp. M et M'', resp. M' et M'') sont acycliques, alors M'' (resp. M', resp. M) est acyclique.

7. Supposons que M est un $\mathbf{Z}$-module libre. Montrer que $\hat{H}^{i+1}(G, M) = \hat{H}^i(G, M/2M)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.
8. Supposons que $2.M = 0$. Montrer qu'on a $\hat{H}^0(G, M) = \hat{H}^1(G, M)$.
9. Supposons que M est un $\mathbf{Z}$-module libre. Montrer que M est acyclique si et seulement si $\hat{H}^0(G, M) = 0$.
10. Montrer que si M est de type fini, son quotient de Herbrand est égal à 1.
11. Montrer que si $M = 2M$, M est acyclique.
12. Supposons que G opère sur un ensemble X. Cela fait de $\mathbf{Z}[X]$ un G-module. Montrer que $\mathbf{Z}[X]$ est acyclique si et seulement si c n'a pas de point fixe dans X.

III

Soit K un corps. Soit n entier ≥ 0. On note $\mathbf{P}^n(K)$ l'espace projectif de dimension n sur K. Soit $f \in K[X_0, X_1, ..., X_n]$, non nul, homogène de degré > 0. On note $D^+(f) = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbf{P}^n(K) | f(x_0, x_1, ..., x_n) \neq 0\}$. Considérons l'application $\phi : \mathbf{P}^2(K) \to \mathbf{P}^5(K)$ qui à (X_0, X_1, X_2) associe $(X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2)$.

On note $\theta : K[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5] \to K[X_0, X_1, X_2]$ donnée par $\theta(P)(X_0, X_1, X_2) = P(X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2)$. On note I le noyau de θ.
1. Montrer que ϕ est bien défini.
2. Montrer que ϕ est un morphisme de variétés algébriques.
3. Montrer que $\{Z_0Z_1 - Z_3^2, Z_0Z_2 - Z_4^2, Z_1Z_2 - Z_5^2, Z_0Z_5 - Z_3Z_4, Z_1Z_4 - Z_3Z_5, Z_2Z_3 - Z_4Z_5\}$ est un système de générateurs de I.
4. Montrer que I est un idéal homogène. On note $V = V_p(I)$ la variété projective associée (c'est la *surface de Veronese*).
5. Montrer que ϕ est une bijection entre les ensembles $\mathbf{P}^2(K)$ et V.
6. Montrer que $V \subset D^+(Z_0) \cup D^+(Z_1) \cup D^+(Z_2)$.
7. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, trouver un morphisme $\psi : D^+(Z_i) \cap V \to D^+(X_i)$ réciproque de ϕ.
8. En déduire que ϕ définit un isomorphisme de variétés algébriques entre $\mathbf{P}^2(K)$ et V.
9. Soit $F \in K[X_0, X_1, X_2]$ un polynôme homogène non nul de degré 2. Montrer que $\phi(D^+(F)) = V \cap D^+(H)$, où $H \in K[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5]$ est homogène de degré 1.
10. Montrer que $D^+(H)$ est un ouvert affine de $\mathbf{P}^5(K)$.
11. En déduire que $D^+(F)$ est un ouvert affine de $\mathbf{P}^2(K)$.
12. Peut-on généraliser cet argument pour montrer que $D^+(f)$ est un ouvert affine de $\mathbf{P}^n(K)$ pour tout $f \in K[X_0, X_1, ..., X_n]$ homogène de degré > 0 ?