De la mentalité romantique aux recherches arithmétiques

Loïc Merel*

February 14, 2024

1 L'influence du Zeitgeist sur les mathématiques

Nous sommes le 18 août 1998, c'est l'ouverture du Congrès International des Mathématiciens à Berlin. Le président de l'Union Mathématique Internationale, David Mumford, prononce la traditionnelle allocution d'ouverture devant quelques milliers de participants représentant les délégations du monde entier. En dépit d'un programme serré, parmi les remerciements et les généralités d'usage, il y glisse l'esquisse d'un parallèle entre les tendances qui gouvernent les mathématiques et celles qui gouvernent les arts et les lettres.

> There is a more socially grounded view, which says that mathematics and mathematicians are deeply embedded in human culture and are tied to the Arts in particular where the love of abstraction also flourishes. Let me illustrate this. At the beginning of this century, the great German mathematician David Hilbert carried out his extremely influential dissection of the axioms of Euclidean geometry into their logical components. Was it a coincidence that at the same time, the French impressionists were dissecting the light and color of painting into their basic components? In the 20's and 30's, the Bauhaus school of architecture was building in Germany human habitations along minimalist lines. And Bourbaki in France was rebuilding mathematics in its most abstract possible setting. It is amusing to work out more parallels between mathematics and the broad trends in human culture, such as the discovery that randomness could be more effective than precise planning, by the artist Jackson Pollock and the mathematician N. C. Metropolis at roughly the same time. But I will content myself with the assertion that the most widely renowned mathematical achievement of the last four years, the solution of Fermat's 300-year-old problem, is the quintessential post-modern theorem. The basic qualities of what is known as post-modern art and architecture are their conscious combination of idioms from every era in the past. And, indeed, Wiles' proof combines ideas from almost every branch of classical mathematics - number theory proper, algebraic geometry, Lie group theory and analysis; and its roots go back to Kronecker's famous vision, his "Jugendtraum", in the 19th century.[1]

Quelques années plus tard, Mumford s'est efforcé d'illustrer davantage cette correspondance[2]. Il conclut alors :

> But maybe we should accept that we are merely pawns, while the real player is the zeitgeist!

Dans un tel panorama, il nous semble qu'un appariement entre une branche des mathématiques et un mouvement esthétique, philosophique et moral fait défaut et mérite d'être considéré.

Voici une liste de personnages associés au premier Romantisme[3], la plupart d'entre eux participant à ce que l'Histoire a retenu sous le nom de Cercle d'Iéna[4] :

Caroline Böhmer-Schlegel-Schelling (née Michaelis) (1763-1809), Johann Paul Friedrich Richter (Jean Paul) (1763-1825), Dorothea Veit-Schlegel (née Brendel Mendelssohn)(1764-1839), Anne Louise Germaine de Staël-Holstein (Madame de Staël, née Necker) (1766-1819), Willhelm August Schlegel (1767-1845), Friedrich Hölderlin (1770-1843), Karl Wilhelm Friedrich Schlegel (1772-1829), Georg Philipp Friedrich Freiherr von Hardenberg (Novalis) (1772-1801), Ludwig Tieck (1773-1853), Wilhelm Heinrich Wackenroder (1773-1798), Friedrich Schelling (1775-1854), Sophie Tieck (1775-1833).[5]

*Université Paris Cité and Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, F-75013 Paris, France.

[1] David Mumford, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berlin 1998, August 18 - 27, Volume 1, page 24 et https://www.mathunion.org/icm/icm-videos/icm-1998-videos-berlin-germany/icm-berlin-videos-18081998

[2] David Mumford, Art, Mathematics and the Zeitgeist: parallels between the two most international disciplines https://www.dam.brown.edu/people/mumford/beyond/papers/2008f–ArtMathZeitgeist-talk.pdf.

[3] Par convention Romantisme désigne ici le mouvement originel, les termes romantisme et romantique ayant un sens élargi.

[4] La réalité sociale du Cercle d'Iéna se manifestait notamment par la fréquentation de salons chez Caroline Böhmer-Schlegel-Schelling ou chez Henriette Herz, et par la publication d'une revue : *Athenaeum*.

[5] Jean Paul ne peut être rattaché au cercle d'Iéna. Madame de Staël non plus, mais elle devint proche de A. W. Schlegel, qui en était un fondateur. Une foule d'autres noms sont occasionnellement associés au mouvement, quelquefois même des figures plus renommées comme Goethe, Schiller ou Kant. Il faut alors examiner ce qui motive de tels jugements.

Ces noms sont ceux qui reviennent le plus souvent dans l'histoire du premier Romantisme (Frühromantik) autour de 1800. Le mouvement s'est poursuivi (Hochromantik) au cours du 19ème siècle en Allemagne avec d'autres groupes (Heidelberg, Berlin), puis en Angleterre, en France, encore en Allemagne (Spätromantik), etc.

Pour faire contrepoint, nous faisons appel à André Weil (1906-1998), dont les jugements ont partout influencé la présente étude[6]. Dans son ouvrage *Basic Number Theory*[7], il dresse en 1967 une liste chronologique de contributeurs à la théorie des nombres[8] moderne. Sans constituer un panthéon canonique, la liste de Weil est une sélection à notre avis consensuelle si l'on pense qu'il ne s'agit que de la théorie algébrique qui a débouché sur la théorie du corps de classe (Klassenkörpertheorie), qui devint la théorie dominante au vingtième siècle. C'est la partie des mathématiques qui nous intéresse.

Fermat (1601-1665), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Gauss (1777- 1855), Dirichlet (1805-1859), Kummer (1810-1893), Hermite (1822-1901), Eisenstein (1823-1852), Kronecker (1823-1891), Riemann (1826-1866), Dedekind (1831-1916), H. Weber (1842-1913), Hensel (1861-1941), Hilbert (1862-1943), Takagi (1875-1960), Hecke (1887-1947), Artin (1898-1962), Hasse (1898-), Chevalley (1909-).

Dans cette liste, à partir de Carl Friedrich Gauss, tous les noms sont allemands, exceptés Charles Hermite (français), Teiji Takagi (japonais, mais issu de l'école allemande) et Claude Chevalley (français). Le seul personnage contemporain du Cercle d'Iéna est Gauss ; c'est aussi le plus important pour l'histoire et le développement de la théorie des nombres. Gauss a passé sa vie à Brunswick et Göttingen, deux villes séparées d'Iéna par moins de 200 km. À notre connaissance, aucun connaisseur de l'histoire des idées n'a exploré systématiquement cette coïncidence qui a piqué notre curiosité. Nos efforts sont ici modestes pour une telle investigation. Nous nous concentrerons sur Gauss comme personnage-clé, avec des résultats nuancés. Au delà de cette enquête historique, nous avons un deuxième objectif, peut-être plus significatif : celui de voir en quoi l'attrait pour la théorie des nombres procède d'une attitude romantique, en accord avec l'esprit, et même avec une certaine doctrine anti-fondationnaliste de ce mouvement.

Précisons que nous avons écrit cet essai sans connaissance profonde de plusieurs sujets que nous abordons, et sans guère d'expérience dans ce genre d'exercice. Nous avons souvent fait appel à des sources secondaires hétérogènes pour nous faire une opinion ou dans le but de cerner une certaine mentalité. Si une qualité qui nous est propre donne validité à notre exposé, elle réside dans notre expérience personnelle de sensibilité à un certain *charme* – conformément à la croyance Romantique en la subjectivité de la connaissance.

La première question est la plus, ou la moins, évidente : qu'est-ce que le Romantisme ?

2 La quête illusoire d'une définition

Le sens que nous donnons au terme romantisme est évidemment éloigné de son acceptation la plus commune de nos jours, que l'on utilise par exemple pour désigner un genre cinématographique tel que «comédie romantique». Ce sens n'est pas non plus celui qui fait, par exemple, d'Évariste Galois (1811-1832) un personnage romantique (passionné, désintéressé, connaissant un destin tragique). Nous n'envisageons pas le sens de ce terme en musique (malheureusement !), et guère davantage dans le reste des arts.

L'usage de ce mot remonte au moins à A. W. Schlegel et semble avoir été popularisé par Madame de Staël, qui écrit :

> Le nom de romantique a été introduit nouvellement en Allemagne, pour désigner la poésie dont les chants des troubadours ont été à l'origine, celle qui est née de la chevalerie et du christianisme.[9]

Madame de Staël nous conte l'histoire d'un mot, mais se garde de nous dire quel est en le sens. L'explication proto-Romantique est complétée par William Vaughan (?-2015).

> In using the word «romantic» to defend the free expression of imagination and association in the arts, therefore, the Schlegels had chosen their name with care. They had taken a term that had already come to mean for academic theorists and the admirers of classical art those emotive extremes that lay beyond the proper sphere of the artist to depict. Even in poetry, depite the greater descriptive potential conceded to words, there were limits; for imagination was not allowed to disturb the clarity of narrative of form.
>
> The word «romantic», in fact, derived precisely from the kind of poetry that felt to display such irregularities, the chivalric romances of the Middle Ages. Since the Renaissance, the word has come to

[6]Nous avions depuis longtemps l'impression, peut-être fausse, que Weil avait dans l'idée l'association, examinée ici, entre Romantisme et théorie des nombres. Le lecteur pourra juger selon les citations de Weil qu'il pourra trouver tout au long de ce texte.

[7]Weil, André (1974). *Basic Number Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

[8]Aujourd'hui comme au 19ème siècle, théorie des nombres et arithmétique sont synonymes.

[9]Madame de Staël, *De l'Allemagne*.

mean, as it did to Reynolds in the quotation above, all that was wild and fantastic, «that imagination which is most free», as one early commentator, the philosopher Henry More, had expressed in 1659.[10]

Bien après la fin de ce mouvement, forts du recul nécessaire, les critiques se sont mis en quête d'un Graal improbable : une définition. Nous retiendrons les synthèses convergentes de trois d'entre eux.

Premièrement, Isaiah Berlin (1909-1997) s'est exprimé sur le Romantisme dans une série de conférences données en 1965.

> I might be expected to begin, or to attempt to begin, with some kind of definition of Romanticism, or at least some generalisation, in order to make clear what it is that I mean by it. I do not propose to walk into that particular trap. The eminent and wise Professor Northrop Frye points out that whenever anyone embarks on a generalisation on the subject of Romanticism, even something so innocuous, for example, as to say that a new attitude sprang up among English poets towards nature – in Wordsworth and Coleridge, let us say, as against Racine and Pope – somebody will always be found who will produce countervailing evidence from the writings of Homer, Kalidasa, pre-Muslim Arabian epics, medieval Spanish verse – and finally Racine and Pope themselves. For this reason I do not propose to generalise, but to convey in some other way what it is that I think Romanticism to be.[11]

Deuxièmement, la conclusion d'Hans Eichner (1921-2009) n'est pas différente en 1982.

> More than six hundred books and articles published during the first half of this century attempt to define Romanticism. Culminating this immense effort, Rene Wellek's famous paper of 1949, "The Concept of Romanticism in Literary History,"[12] identifies the most significant features of the Romantic period as the emphasis on symbol and myth in literature and the replacement of the "mechanical philosophy" by an organic view of the cosmos. [...] At long last, it appears, scholars have realized [...] that Romanticism" is not a technical term [...], but a word with a long, complicated, and confused history and that any definition capable of encompassing Keats's sonnet "To Sleep," Novalis' Heinrich von Ofterdingen, and Hugo's Hernani must be so broad as to be meaningless.[13]

Troisièmement, Charles Larmore (1950-), moins concentré que Berlin sur les romantiques allemands, se heurte en 1996 aux mêmes difficultés, en dépit de sa sympathie pour le mouvement.

> A little over seventy years ago, Arthur O. Lovejoy, the philosopher and founder of the discipline of the history of ideas, wrote an important essay that would seem to imply that this book, devoted as it is to something called "Romanticism", is engaged in an impossible project[14]. Lovejoy's thesis was that no significant view of man and the world, no distinctive form of thought or aesthetic, unites all the many things commonly assigned to "Romantic movement".[15]

Évidemment, nous ne pouvons prétendre à mieux que Berlin, Eichner, et Larmore, et par delà ces auteurs éminents, que Frye et Lovejoy. Nous prenons prudemment note de leurs conclusions. Toutefois, ne pas connaître la définition d'un mot ne saurait empêcher de l'employer, ni de chercher le sens profond de ce que ce mot désigne imparfaitement. Mais il nous paraît plus sage de suivre les conseils judicieux de Larmore.

> While accepting Lovejoy's point about the disparate character of all that is conventionnaly called Romantic, we may still seek to figure out what Romanticism really was, if we understand this enterprise as selective redefinition, identifiying and systemizing those elements of what has counted Romantic that are important for our own concerns.
>
> [...]
>
> We are not, of course, uncovering what Romanticism was "in itself". But we are determining what it means for us.[16]

Nous ferons de notre mieux pour garder à l'esprit que chaque emploi du mot romantique, ou même Romantique, doit être apprécié dans son contexte, en tenant compte du sens que celui qui l'emploie a à l'esprit.

Puisque le Romantisme s'est nourri d'une réaction face aux Lumières, voyons ce que sont ces dernières. Pour cela, nous pouvons encore bénéficier de la lecture de Berlin :

[10] William Vaughan, *Romantic Art.*

[11] Isaiah Berlin, *The Roots of Romanticism*: Second Edition, Princeton University Press

[12] The Concept of "Romanticism" in Literary History. I. The Term "Romantic" and Its Derivatives, *Comparative Literature*, Vol. 1, No. 1 (Winter, 1949), pp. 1-23 and The Concept of "Romanticism" in Literary History II. The Unity of European Romanticism René Wellek *Comparative Literature*, Vol. 1, No. 2 (Spring, 1949), pp. 147-172 (26 pages)

[13] Hans Eichner, The Rise of Modern Science and the Genesis of Romanticism, PMLA, Vol. 97, No. 1 (Jan., 1982), pp. 8-30 (23 pages).

[14] Lovejoy, A., 1960, *Essays in the History of Ideas*, New York: Capricorn.

[15] Charles Larmore *The Romantic Legacy* Columbia University Press, 1996.

[16] Charles Larmore *loc. cit.*

> The Enlightenment of the late seventeenth and early eighteenth centuries needs some definition. There are three propositions, if we may boil it down to that, which are, as it were, the three legs upon which the whole Western tradition rested. They are not confined to the Enlightenment, although the Enlightenment offered a particular version of them, transformed them in a particular manner. The three principles are roughly these. First, that all genuine questions can be answered, that if a question cannot be answered it is not a question. [...] It is, in fact, the backbone of the main Western tradition, and it is this that Romanticism cracked.
>
> The second proposition is that all these answers are knowable, that they can be discovered by means which can be learnt and taught to other persons; [...]
>
> The third proposition is that all the answers must be compatible with one another, because, if they are not compatible, then chaos will result.[17]

Comment contester frontalement de tels principes, surtout de la part de scientifiques ? Si le mouvement Romantique s'y oppose, c'est en un sens qui demande à être précisé. Qu'en est-il en mathématiques ?

La réponse ne pose pas de difficultés. La contradiction de la première proposition en mathématiques (question d'indécidabilité) ne nous intéresse pas ici. La deuxième proposition y est trivialement mise en défaut : «Quelle est la 2023!-ème décimale du nombre $\pi = 3,14159...$?» n'a pas de peine à demander l'idiot pour embarrasser le savant. Face à la question de savoir si toutes les vérités peuvent être déterminées, il faut immédiatement battre en retraite et se rabattre sur la question des vérités importantes – un qualificatif que nous ne chercherons pas à préciser, mais qui rejoint la notion de «grands problèmes» que nous verrons ci-dessous. La troisième proposition concerne la cohérence, qui est un autre sujet de logique qui ne nous concerne pas.

Mais l'essentiel n'est pas là. Berlin ne nous dit pas *comment* on parvient à connaître la réponse à ces questions, en particulier pas s'il existe une méthode *universelle* pour trouver les réponses, ni *quelles* questions présentent un intérêt particulier. S'il existe une attitude romantique en mathématiques, elle concerne davantage ces derniers points.

Même dans un cadre ainsi restreint, cela nécessite un examen de la déclinaison philosophique du mouvement, dans ses aspects esthétique, épistémique, voire métaphysique.

3 La raison ne saurait dominer la beauté terrible de la nature

La collection La Pléiade consacre deux volumes aux auteurs Romantiques allemands[18]. L'écrivain Maxime Alexandre, en charge de l'édition du premier volume, entame l'introduction directement par ces vers de Shakespeare :

> There are more things in heaven and earth, Horatio,
> Than are dreamt of in your philosophy.[19]

Ces lignes ont connu une traduction en allemand sous la plume d'A. W. Schlegel[20], fondateur avec son frère Friedrich du Cercle d'Iéna[21]. L'influence de Shakespeare sur les Romantiques ne fait pas de doute, à tel point que Stendhal (1783-1842) fit de Shakespeare la figure tutélaire du Romantisme[22].

Dans cette scène, Horatio, en bon naturaliste, s'étonne qu'Hamlet l'amène rencontrer un spectre. Mais comment ne pas y voir, comme bien des observateurs avant nous, une déclaration d'une portée générale ? Ce n'est pas une extrapolation exagérée de voir là une mise en garde contre l'hubris de croire en la toute puissance de l'intellect, une proclamation de la faiblesse de l'esprit humain, et une affirmation de la grandeur inépuisable de la nature. Ce dernier mot nous paraît approprié, même si son sens n'est pas clair, nous en sommes conscients. Nous ne savons pas dire, par exemple, dans quelle mesure il s'agit-il bien là du Ciel et de la Terre au sens shakespearien. Une telle philosophie contrarie évidemment l'esprit des Lumières, et *a fortiori* le rêve prométhéen, entretenu même par d'excellents esprits, de conquérir ou domestiquer entièrement la nature par la connaissance[23].

Il n'est pas question ici de retracer l'histoire d'un tel rêve ni d'en juger la pertinence, mais seulement de voir comment une telle mentalité, et les réactions qui ont suivi, ont pu s'incarner en mathématiques.

[17] Isaiah Berlin, *loc. cit.*

[18] *Romantiques allemands, Tomes 1 et 2*, (Bibliothèque de la Pléiade).

[19] *Hamlet.* Acte I, scène 5.

[20] Avec peut-être Ludwig et Sophie Tieck.

[21] A. W. Schlegel traduit les vers ci-dessus par

> Es giebt mehr Ding' im Himmel und auf Erden
> Als eure Schulweisheit sich träumt, Horatio.

[22] Stendhal, *Racine et Shakespeare.*

[23] Voir par exemple la thèse, défendue entre autres par le physicien Sean Carroll, selon laquelle les connaissances actuelles en physique suffisent à expliquer tous les phénomènes naturels de nos vies.

Figure 1: *Le voyageur contemplant une mer de nuages* de Caspar David Friedrich (1774-1840). Les contenus textuels en allemand, en anglais et en français sont différents ; pourtant les pages Wikipedia sur le Romantisme présentent toutes trois cette même image comme illustration principale, de même qu'une multitude de traités sur le Romantisme la placent en couverture. (Une phrase notoire de Friedrich : «Le peintre ne doit pas peindre seulement ce qu'il voit devant lui, mais ce qu'il voit en lui. S'il ne voit rien en lui, qu'il renonce à peindre ce qu'il voit au dehors.»)

Selon Manfred Frank (1945-), la déclinaison philosophique du Romantisme a été théorisée par Novalis et F. Schlegel[24]. Dans la longue analyse de Frank, le point saillant de leur doctrine est l'impossibilité de fonder la philosophie à partir d'un principe primordial. Alors étudiant, F. Schlegel écrivait en 1796 :

> [...] la philosophie, comme un poème épique, doit commencer au milieu, et il est impossible de la présenter et de lui ajouter morceau par morceau de telle sorte que le premier élément soit complètement justifié et expliqué.[25] [26]

On retrouve la même notion chez son ami Novalis.

[24]Manfred Frank. *The philosophical foundations of German Romanticism.* Albany, NY: State University of New York Press, 2004. Nous utiliserons la traduction en anglais abrégée de l'ouvrage *Unendliche Annäherung* Die Anfänge der philosophischen Frühromantik.

[25]Daher muß die Philosophie wie das epische Gedicht in der Mitte anfangen, und es ist unmöglich dieselbe so vorzutragen und Stück für Stück hin zuzählen, dass gleich das Erste für sich vollkommen begründet und erklärt wäre.

[26]Friedrich Schlegel, Aus der ersten Epoche. Zur Logik und Philosophie. 1796 (in Jena).

Toute recherche d'un premier principe est un non-sens – c'est une idée régulatrice. [27] [28]

D'après Frank, «idée régulatrice» signifie «idée issue de la raison» [29]. Il y a là davantage qu'un scepticisme vis-à-vis de ce qui est accessible à la raison. L'attitude philosophique Romantique semble avoir été articulée le plus pleinement par F. Schlegel, et résumée ainsi par Elizabeth Millán-Zaibert :

> Schlegel characterizes the human condition in terms of a feeling of longing for the infinite, a longing for something that we as finite humans, can never possess, but which guides our search for knowledge and leads to the insight that the search is all we can hope for, not the possession.[30] [31]

Il va de soi que ni Novalis, ni F. Schlegel ne se désolent de leur conclusion anti-fondationnaliste. Ils semblent au contraire se réjouir de cette absence de socle scientifique, qui, s'il existait, à leurs yeux, les confinerait à une prison[32].

Deux conséquences du postulat romantique de supériorité[33] de la nature sur la raison nous concernent dès lors. La première d'entre elles voit les mathématiques à l'image de la nature, c'est-à-dire présentant toujours des merveilles qui ne se laissent expliquer, au moins dans un premier temps, par aucune horlogerie générale, par aucun procédé rationnel uniforme, et constituant ainsi un défi aux facultés diurnes de l'esprit.

La deuxième conséquence vient à l'encontre de la première : puisque les humains émanent de la nature, ils échappent eux aussi à une réduction mécanistique intelligible – ce qui n'est pas dire autre chose qu'ils échappent à une réduction mécanistique[34]. En particulier, ils sont susceptibles d'exercer d'autres facultés, y compris des facultés irrationnelles, pour pratiquer les mathématiques.

Avant d'aller plus avant dans de telles thèses, faut-il rappeler qu'il ne peut y avoir de mathématiques sans l'exercice permanent de la raison, comme il ne peut y avoir de science sans un examen critique ? Nous ne pouvons qu'approuver Weil, lorsqu'il écrit en 1949 :

> Que le mathématicien doive constamment tirer de son «intuition» de nouveaux éléments de raisonnement de nature alogique ou «pré-logique», c'est ce qui ne paraît plus soutenable qu'à quelques esprits attardés.[35]

Toutefois, cette phrase de Weil trouvera un contrepoint ci-dessous lorsque nous examinerons un passage qui l'a suivie. Dans l'esprit de l'avertissement de Weil, voyons quelles objections les partisans de la raison ont opposé au Romantisme.

4 Le réquisitoire des rationalistes

Le Romantisme est né d'une réaction aux Lumières exportées par la France. En retour, les rationalistes, qui se réclament des Lumières, jugent avec sévérité et condescendance le mouvement. L'analyse du Romantisme occupe un chapitre entier de *A History of Western Philosophy* de Bertrand Russell (1872-1970), qui dépeint le mouvement comme obsédé par les sentiments particuliers et les aspirations individuelles immédiats. Le procès pour complaisance se conclut par un verdict.

> Man is not a solitary animal, and so long as social life survives, self-realization cannot be the supreme principle of ethics.[36]

Au 21ème siècle, le psycholinguiste Steven Pinker (1954-) a publié une série de volumes qui célèbrent les valeurs des Lumières et la rationalité. Il condamne la pensée magique qu'il comprend comme typique de l'attitude romantique.

> The Enlightenment belief in progress should not be confused with the 19th-century Romantic belief in mystical forces, laws, dialectics, struggles, unfoldings, destinies, ages of man, and evolutionary forces that propel mankind ever upward toward utopia.

[27] Alles Suchen nach der Ersten ist Unsinn – es ist regulative Idee.

[28] Novalis, Schriften, edited by Paul Kluckhohn and Richard Samuel. Stuttgart: Kohlhammer, 1960 ff.

[29] Manfred Frank, *loc. cit.*

[30] Elizabeth Millán-Zaibert, introduction à Manfred Frank *loc. cit.*

[31] Comme l'arpenteur en quête du château. Comparer à Manin qui reprend T.S. Eliott : «For us there is only the trying, the rest is not our business.»

[32] Une discussion plus approfondie se trouve dans Gorodeisky, Keren, "19th Century Romantic Aesthetics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2016/entries/aesthetics-19th-romantic/>.

[33] Nous préférons éviter le jargon philosophique tel que «antériorité ontologique».

[34] Conformément à une analogie prisée par les Romantiques tels que Novalis.

[35] André Weil. L'avenir des mathématiques, *Œuvres Scientifiques / Collected Papers.* Springer Collected Works in Mathematics (in English, French, and German). Vol. 1 (1926–1951) (2nd printing ed.). Springer.

[36] Bertrand Russell, *A History of Western Philosophy*

> [...]
>
> There was the Romantic movement of the counter-Enlightenment, captured in Johann Herder's avowal "I am not here to think, but to be, feel, live!" There's the common veneration (not just by the religious) of faith, namely believing something without a good reason.[37]

On soupçonne que Pinker est familier avec les vues de Berlin[38]. Ce dernier identifie Johann Georg Hamann (1730-1788), «le mage du nord», comme le précurseur primordial du mouvement, et dont Johann Gottfried von Herder (1744-1803), déjà cité par Pinker, fut le disciple.

> My reason for having introduced the obscure figure of Johann Georg Hamann is that I believe him to have been the first person to declare war upon the Enlightenment in the most open, violent and complete fashion.
>
> [...]
>
> He [Hamann] began with Hume, and said in effect that Hume was right; that if you ask yourself how it is that you know the universe, the answer is that you know it not by intellect, but by faith.[39]

Hamann et Herder font partie de la génération antérieure au Cercle d'Iéna, qu'ils ont influencé, si bien qu'on les qualifie parfois de pré-romantiques. Non seulement Herder rejette la primauté de la pensée, comme son maître Hamann, mais il nie de plus l'universalité de la connaissance, comme le rapporte Berlin :

> Hence Herder's final conclusion, namely that each human group must strive after that which lies in its bones, which is part of its tradition. Each man belongs to the group he belongs to; his business as a human being is to speak the truth as it appears to him; the truth as it appears to him is as valid as the truth as it appears to others. [...] and by enabling this doctrine to emerge Herder did plunge a most terrible dagger into the body of European rationalism, from which it never recovered.[40]

Quelle théorie pourrait être plus détestable pour les tenants de la raison que relativisation de la vérité ?

Après les accusations de complaisance, d'égoïsme, d'obscurantisme, de relativisme, suivent naturellement celles d'alimenter le nationalisme et de constituer un mouvement d'arrière-garde, hostile au progrès, voire même hostile à la réalité. De telles dénonciations sont spécialement infamantes dans le domaine scientifique, y compris en mathématiques. Eichner dresse un piètre bilan de la réussite du mouvement en sciences.

> Yet it seems to me that the history of Western thought from 1500 to the present day must be written with this achievement constantly in mind and that the grandeur and the futility, the wisdom and the folly, of the Romantic age can only be assessed and understood if the period is seen in relation to this achievement; for Romanticism is, perhaps predominantly, a desperate rearguard action against the spirit and the implications of modern science -a rearguard action that, to anticipate the substance of this paper, liberated the arts from the constraints of a pseudoscientific aesthetics but that was bound to fail in the proper domain of science.[41]

Larmore, moins intéressé par les sciences qu'Eichner, davantage tourné vers le Romantisme anglais, plaide coupable avec circonstances atténuantes et s'efforce de sauver ce qui peut l'être[42]. Mais nous retiendrons le jugement final nuancé d'Eichner.

> Similarly, the Romantics never wholly rejected reason, but they dethroned it, assigning it only the more menial services; to attain those truths that really matter they relied on the irrational faculties of the mind-unmediated insight, "enthusiasm," "intellectual intuition," and the imagination, concepts the Romantics did not always clearly differentiate.[43]

Millán-Zaibert parvient à une conclusion plus forte encore que celle d'Eichner en examinant la philosophie de F. Schlegel : comme Franke, elle constate une opposition déterminée à l'idée de principes fondateurs, mais cela n'entraîne nullement une opposition à la raison[44]. Il va de soi que les positions des Romantiques n'étaient pas identiques et que le mouvement n'était pas sous le contrôle des fondateurs d'Iéna[45].

Même si l'attitude romantique, même sous une forme allégée, n'a guère connu de succès en sciences, la notion selon laquelle, sans pour autant renoncer à la raison, ce sont les facultés irrationnelles de l'esprit qui permettent d'atteindre les vérités importantes est excentrique, mais n'est pas entièrement dénuée de mérite en mathématiques. Nous allons en voir quelques indications.

[37] Steven Pinker. *Enlightenment Now*

[38] Isaiah Berlin, *loc. cit.*

[39] Isaiah Berlin, *loc. cit.*

[40] Isaiah Berlin, *loc. cit.*

[41] Hans Eichner, *loc. cit.*

[42] Charles Larmore, *loc. cit.*

[43] Hans Eichner, *loc. cit.*

[44] Elizabeth Millán-Zaibert, Romantic Rationalism, *Pli*, 10 (2000) 141-155.

[45] Frank note dans *loc. cit.* une divergence entre les philosophies de F. Schlegel et de Schelling par exemple.

5 Trop beau pour ne pas être vrai

La conception du Romantisme comme la résistance à une vision mécanistique, le refus de l'intégration dans une horlogerie totalement expliquée, l'aspiration à échapper à un carcan rationaliste stérile connaît des adeptes de longue date en mathématiques. L'exemple le plus fameux est incarné par les intuitionnistes face au formalisme dont Hilbert était le champion. Cette querelle du début du vingtième siècle faisait encore débat à Paris vers 1980[46].

Au 21ème siècle, on peut discerner un héritier au formalisme Hilbertien dans le projet de confier aux machines la vérification, et peut-être un jour la recherche, des démonstrations. Michael Harris est un héraut contemporain de la résistance au réductionnisme d'une telle entreprise[47]. Avant même que la vérification automatique soit d'actualité, Harris portait un regard qui semble faire écho à la formule d'Eichner sur la valorisation des facultés irrationnelles par les Romantiques[48].

> [...] what mathematicians seem to value most are "ideas" (not necessarily of the Platonic variety); the most respected mathematicians are those with strong "intuition." [49]

Une telle assertion est d'autant plus convaincante qu'elle ne se fonde pas sur une conception épistémique particulière, mais sur une observation sociologique. L'apprentissage des mathématiques ne nécessite, et ne comporte le plus souvent, aucune éducation formelle sur la nature de cette science. Pourtant les mathématiciens sont spontanément convaincus de l'importance des idées et de l'intuition dans l'exercice de la recherche.

L'observation empirique de Harris trouve un prolongement dans des observations telles que la suivante. Les qualificatifs juste, intéressant et beau appartiennent à des catégories différentes puisqu'ils sont respectivement de natures objective, subjective et esthétique. Ils sont pourtant monnaies courantes dans le jargon des lettres de recommandations, et leur pouvoir de conviction va croissant quand ils affectés à l'évaluation des travaux :

$$\text{Juste} < \text{Intéressant} < \text{Beau}.$$

Après les idées et l'intuition, nous avons maintenant le sentiment esthétique dans la boîte à outils cognitive des mathématiciens. La plus célèbre expression de cet état esprit est sans doute la boutade d'Hermann Weyl (1885-1955)[50].

> My work always tried to unite the truth with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.[51]

Une telle assertion paradoxale se rapproche d'une formule bien antérieure du poète romantique anglais John Keats (1795-1821) :

> What the imagination seizes as Beauty must be Truth-whether it existed before or not... .[52]

Le lecteur perplexe à la lecture de pareilles affirmations pourra considérer une anecdote relatée par James Milne (1942-) alors étudiant de John Tate[53] (1925-2019).

> As a thesis topic, Tate gave me the problem of proving a formula that he and Mike Artin had conjectured concerning algebraic surfaces over finite fields. One day he ran into me in the corridors of 2 Divinity Avenue and asked how it was going. "Not well" I said, "In one example, I computed the left hand side and got $p = 13$; for the other side, I got $p = 17$; 13 is not equal to 17, and so the conjecture is false." For a moment, Tate was taken aback, but then he broke into a grin and said "That's great! That's really great! Mike and I must have overlooked some small factor which you have discovered."
>
> He took me off to his office to show him. In writing it out in front of him, I discovered a mistake in my work, which in fact proved that the conjecture is correct in the example I considered. So I apologized to Tate for my carelessness. But Tate responded: "Your error was not that you made a mistake – we all make mistakes. Your error was not realizing that you must have made a mistake. This stuff is too beautiful not to be true."[54]

[46] *Penser les mathématiques Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole normale supérieure* Jean Dieudonné, J.-P. Descles, R. Apery, Maurice Caveing - Collection Points - Sciences.

[47] Michael Harris, *Mathematics without Apologies* et *Silicon Reckoner* https://siliconreckoner.substack.com.

[48] Dans *Mathematics without Apologies* Harris utilise le mot romantique en le sens commun que nous avons convenu d'emblée de rejeter.

[49] Michael Harris. *Contexts of Justification*, Math. Intelligencer, 23, 18-22, Winter 2001.

[50] Weyl$\neq$Weil.

[51] Rapportée dans une notice nécrologique de Freeman J. Dyson, *Nature*, 10 Mars 1956.

[52] Lettre du 22 novembre 1817 à Benjamin Baily.

[53] Tate était élève d'Emil Artin (voir la liste de Weil) émigré outre-atlantique suite à la catastrophe du nazisme. Il a joué un rôle essentiel pour l'importation, à la suite d'Artin, et le développement, tout au long de la deuxième moitié du vingtième siècle, de la théorie algébrique des nombres aux États-Unis.

[54] Rapporté dans *Collected Works of John Tate: Parts I and II* by Barry Mazur (Editor), Jean-Pierre Serre (Editor).

Sur les questions importantes, le jugement esthétique est occasionnellement un guide plus sûr que nos calculs méticuleux.

Revenons à Weyl, renommé, outre pour ses travaux en mathématiques et en physique, pour ses réflexions comme philosophe des sciences. Weil et Chevalley ont rédigé eux aussi une nécrologie de Weyl, dans laquelle se trouve cette phrase pleine de sens :

> À la dissection impitoyable sous le jour cru des projecteurs, il préférait, en bon romantique, le jeu trouble des analogies, auquel se prêtait si bien le langage de la métaphysique allemande qu'il affectionnait.[55]

Ainsi confluent en Weyl le romantisme, la métaphysique allemande, et une faculté de l'esprit qui nous intéresse spécialement : la perception des analogies[56]. Après mûre réflexion, Weyl accordait à l'intuition la primauté parmi les facultés mentales[57]. À cette position, s'ajoutait une attitude plus romantique encore quant à la prépondérance de la subjectivité : celle d'affirmer l'irréductiblité de la conscience[58]. Nous ignorons si notre analyse du romantisme de Weyl[59] rejoint celle de Chevalley et Weil[60], mais il nous semble que la formulation de ces derniers est révélatrice de leurs préoccupations ; on verra ci-dessous l'importance des analogies dans la mentalité de Weil, si bien que l'association des analogies au romantisme nous paraît ici mériter toute notre attention, et que nous y reviendrons plus longuement.[61]

Nous pouvons ajouter d'autres témoignages d'une défiance envers une vision réductrice ou mécanistique des mathématiques. Weil nous a mis en garde plus haut contre contre toute idée de mathématiques affranchies de la rigueur logique indispensable. Il ajoute plus bas dans le même texte.

> Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes.[62]

La question n'est pas d'atteindre toutes les vérités mathématiques, ce qui est évidemment impossible, mais d'aborder les «grands problèmes». Dans un registre similaire, Yuri Manin (1937-2023) rejette l'idée, proche du programme formaliste de Hilbert, d'une réduction à la logique.

> Most likely, logic is capable in justifying mathematics to no greater extent than biology is capable in explaining life[63].[64]

Ainsi, Manin voit une science émergente, qui ne saurait donc se réduire aux lois qui régissent ses constituants. On retrouve la doctrine défendue par F. Schlegel et Novalis selon laquelle la connaissance philosophique ne saurait procéder de la combinaison d'un premier principe et de moyens déductifs. Mais nous nous intéressons moins à l'indépendance des mathématiques vis-à-vis des fondements, qu'à la susceptibilité de toutes ou parties des mathématiques d'être encapsulées dans une théorie close qui résoudrait mécaniquement, au moyen d'un calcul, les «grands problèmes».

Nous n'avons pas épuisé notre inventaire des facultés irrationnelles. L'imagination, chérie par les romantiques, est sans doute plus difficile à mettre en évidence que celles qui ont été déjà énumérées. Dans un ouvrage écrit pour un large public[65], Barry Mazur (1937-) s'attache à retracer le rôle joué par cette faculté pour accomplir certains sauts conceptuels, ceux qui ont permis de compléter le corpus numéraire intitial constitué par les nombres entiers et faire ainsi progresser les mathématiques : le zéro, les nombres négatifs, les nombres irrationnels, les nombres transcendants, et surtout les nombres imaginaires...

Mazur montre en une autre occasion son attention aux facultés de l'esprit les plus détachées de la raison en proposant la traduction suivante de quelques vers de Goethe (1749-1832), qui figurent dans l'introduction du

[55] Claude Chevalley et André Weil. Hermann Weyl 1885-1955. *Œuvres Scientifiques / Collected Papers.* Springer Collected Works in Mathematics (in English, French, and German). Vol. 2 (1951–1964) (2nd printing ed.). Springer.

[56] Nous verrons plus tard la baguette magique des analogies de Novalis, «Zauberstab der Analogie».

[57] "Address on the unity of knowledge". GA IV, 623–649, [165]. Allocution donnée à la conférence pour le bicentenaire de l'Université de Columbia.

[58] Les romantiques perdent toujours contre les rationalistes dans le champ scientifique, comme l'a écrit Eichner avant d'ajouter qu'ils ont eu plus de succès dans les arts et les lettres. En lisant Weyl, on se demande si leur victoire finale n'a pas lieu dans le domaine de la métaphysique.

[59] Voir l'article consacré à Weyl dans Bell, John L. and Herbert Korté, "Hermann Weyl", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/weyl/>.

[60] Chevalley et Weil ne semblent pas convaincus par les réflexions philosophiques de Weyl. Voir le mot «heureusement» dans Chevalley et Weil *loc. cit.*

[61] Parmi les idées qui se sont insinuées dans notre esprit pour donner le présent texte, l'une des principales est née de cette phrase de Chevalley et Weil.

[62] André Weil. L'avenir des mathématiques, *Œuvres Scientifiques / Collected Papers.* Springer Collected Works in Mathematics (in English, French, and German). Vol. 1 (1926–1951) (2nd printing ed.). Springer.

[63] De façon similaire, Manin émet l'opinion qu'il n'y aura jamais de théorie finale en physique. Voir le documentaire de Jean-Michel Kantor, «Manin à Paris» (1989), https://e.pcloud.link/publink/show?code=XZ6vFhZPSubSQd8x5JhGlq8hLYJA7dbMwjy.

[64] Manin, Yu. I. A course in mathematical logic, Springer Verlag.

[65] Barry Mazur, *Imagining Numbers*

livre de théorie algébrique des nombres[66] de Jürgen Neukirch (1937-1997)[67],

> Error is ever with us. Yet some angelic need
> Gently coaxes our striving mind upwards, towards truth.[68]

Plus improbable encore est l'influence des rêves, mais elle est attestée comme en témoigne l'article tout à fait excentrique rédigé par Robert Thomason (1952-1995). Suite au rêve au cours duquel son ami Trobaugh, alors récemment décédé, lui était apparu en songe pour lui donner une indication cruciale, Thomason a publié, et cosigné posthumement avec Trobaugh, le résultat des recherches qui ont suivi.[69] En deçà de cet exemple, nombre de mathématiciens attribuent leurs découvertes à l'activité mentale nocturne.

En lien avec la philosophie adoptée par Novalis and F. Schlegel, l'impossibilité proclamée d'identifier un principe fondateur en philosophie possède un correspondant qui nous intéresse tout spécialement en mathématiques. Contrairement à la première idée qui vient à l'esprit, ce n'est pas le problème bien connu des fondements logiques, apparu au début du 20ème siècle. En effet, comme l'ont affirmé Weil et Manin, même une compréhension parfaite de la logique ne permet nullement d'aborder les «grands problèmes» des mathématiques. C'est pourquoi, ce correspondant que nous recherchons se trouve dans l'absence de méthode générale pour répondre à toutes les questions, dans l'absence de théorie englobante, ou même dans l'absence d'un inventaire exhaustif d'outils dont le chercheur dispose. Il en résulte que ce dernier se trouve en situation non d'appliquer une méthode calculatoire, mais de créer, d'inventer, d'imaginer, d'exercer son intuition, de proposer des idées, et d'exercer les autres facultés irrationnelles qui viennent d'être énumérées.

6 Circonstances nationales : l'élan vital contre l'harmonie morte

Nous ne savons pas mieux exposer que Berlin la toile de fond historique de l'émergence du Romantisme.

> The common view of history and historical change gives us this account. We begin with a French dix-huitième, an elegant century in which everything begins by being calm and smooth, rules are obeyed in life and in art, there is a general advance of reason, rationality is progressing, the Church is retreating, unreason is yielding to the great attacks upon it of the French philosophes. There is peace, there is calm, there is elegant building, there is a belief in the application of universal reason both to human affairs and to artistic practice, to morals, to politics, to philosophy. Then there is a sudden, apparently unaccountable, invasion. Suddenly there is a violent eruption of emotion, enthusiasm. People become interested in Gothic buildings, in introspection. People suddenly become neurotic and melancholy; they begin to admire the unaccountable flight of spontaneous genius. There is a general retreat from this symmetrical, elegant, glassy state of affairs. At the same time other changes occur too. A great revolution breaks out; there is discontent; the King has his head cut off; the Terror begins. [70]

Le Siècle des Lumières fut bien sombre pour l'Allemagne bien loin de l'Âge de la Raison qui se dessinait en France. Suite aux ravages causés par les guerres révolutionnaires et napoléoniennes (1789-1815) en Europe, les idées des Lumières diffusées alors connurent un accueil mitigé en Allemagne. Après l'intérêt initial pour la Révolution, le sang versé et le passage sur le sol allemand des armées française ont généré un sentiment anti-français, qui à son tour a alimenté une réaction face aux Lumières. Nous ne savons pas déterminer si cette réaction est une conséquences de ces circonstances historiques ou s'il est organique dans les dispositions culturelles de l'Allemagne de cette époque.

Quoi qu'il en soit, Berlin décrit ci-après une opposition de mentalités vis-à-vis de la nature qu'il attribue à Goethe[71], sous l'influence d'Hamann. On est tenté de comparer ce propos à la différence entre des forêts allemandes, qui sont des entités organiques à explorer, et des jardins à la française, soumis au contrôle de la part de leurs jardiniers.

> Goethe says much the same thing about Moses Mendelssohn[72]. He says Mendelssohn treats beauty as entomologists treat butterflies. He catches the poor animal, he pins it down, and as its exquisite colours drop off, there it lies, a lifeless corpse under the pin. This is aesthetics! This is a very typical

[66] Jürgen Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie.* Un traité moderne et personnel de la théorie des nombres classique.

[67] D'après The Mathematics Genealogy Project, Neukirch, comme des dizaines de milliers de mathématiciens, est un descendant de la lignée qui remonte à Gauss, via Krull, Loewy, Lindemann, Klein, Plücker, Gerling, Gauss, etc.

[68] Irrtum verlässt uns nie, doch ziehet ein höher Bedürfnis
Immer den strebenden Geist leise zur Wahrheit hinan.

[69] Thomason, R. W.; Trobaugh, Thomas Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories. *The Grothendieck Festschrift*, Vol. III, 247–435. Progr. Math., 88 Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990

[70] Isaiah Berlin, *loc. cit.*

[71] Nous ne souhaitons pas ranger Goethe avec les romantiques.

[72] Moses Mendelssohn (1729-1786) était le père de Dorothea Veit Schlegel, épouse de F. Schlegel, et membre du Cercle d'Iéna – un fait dont le sens n'est pas clair, si ce n'est qu'il indique la petite taille du monde intellectuel de ce temps.

> reaction on the part of the youthful, Romantic Goethe of the 1770s, under the influence of Hamann, against the tendency on the part of the French to generalise, to classify, to pin down, to arrange in albums, to try to produce some kind of rational ordering of human experience, leaving out the élan vital, the flow, the individuality, the desire to create, the desire, even, to struggle, that element in human beings which produced a creative clash of opinion between people of different views, instead of that dead harmony and peace which, according to Hamann and his followers, the French were after.[73]

Toutefois, le Romantisme s'est diffusé en France et en Angleterre au début du 19ème siècle. La liste de Weil reproduite dans l'introduction est une indication claire que la théorie (algébrique) des nombres ne s'est pas développée dans ces deux derniers pays pendant la période 1800-1945 à la mesure de l'excellence de leurs traditions mathématiques respectives. Pour prolonger la distinction d'Hamann, Goethe et Berlin, faut-il voir le désir de généraliser, de classifier, etc dans la géométrie et l'analyse (françaises) et les idées en réaction dans l'arithmétique (Outre-Rhin) ?

Pourtant, jusqu'à la fin du 18ème siècle, la théorie des nombres de l'ère moderne en Europe avait été dominée par quatre figures : Fermat, Euler, Lagrange et Legendre [74]. Trois d'entre elles étaient françaises de naissance ou d'adoption. Seul Euler, qui occupa une chaire à Berlin de 1741 à 1766, pour fuir les troubles en Russie, peut être rattaché au monde intellectuel allemand, si une telle notion a un sens. L'arrivée de Gauss a marqué le début d'un règne sans partage des mathématiciens allemands sur ce que l'on désigne maintenant par la théorie algébrique des nombres. La plupart de ces derniers sont des disciples directs ou indirects de Gauss[75] dont la vie et l'œuvre constituent un tournant décisif[76]. C'est ce que nous allons examiner.

7 Princeps mathematicorum sed non princeps romanticorum

Comme l'indique le titre *Princeps mathematicorum*, tous s'accordent à voir en Gauss la plus grande figure des mathématiques de son époque. Peut-on le rattacher au Romantisme qui a marqué sa génération ? On pourrait relativiser la pertinence d'une telle question en se demandant si, par exemple, le mathématicien américain Tate, enclin à croire que certaines vérités sont trop belles pour ne pas être vraies, peut être rattaché à la Beat Generation de Kerouac, Ginsberg, etc, ou, du moins, au même air du temps. Une telle question paraît absurde. Elle le paraîtraitait beaucoup moins si l'intelligentsia des États-Unis d'Amérique *circa* 1950 avait constitué un monde aussi restreint que celle du nord de l'Allemagne *circa* 1800, et si les domaines intellectuels y avait été aussi peu séparés.

Certains biographes de Gauss sont conscients du Romantisme qui lui était contemporain, mais ils ne sont pas constants dans l'usage du mot romantisme. Il nous faut suivre notre bonne résolution : comprendre chaque usage du mot dans son contexte.

Concernant la figure stéréotypique romantique du génie, merveille de la nature, dans sa biographie de Gauss, W. K. Bühler note sans ambiguïté qu'un tel schéma est inadéquat.

> We now turn to a question which appears to be awkward but is perfectly normal when interpreted in the terms of the 18th century, when the word "genius" had a special meaning. Gauss had no interest in appearing to be a genius and becoming part of a movement which was very much in vogue when he was young.[77]

Lorsque le mot prend un sens de philosophie politique, Bühler écrit :

> Gauss would never have called himself a member or product of the romantic school of thought-he despised its philosophy as far as he was familiar with it-but much of what he did and felt can well be seen as part of the romantic movement.[78]

La dernière phrase, y compris l'utilisation du mot romantique, trouvera son explication un peu plus bas. Concernant les goûts artistiques et littéraires de Gauss, le jugement radical de Bühler ne peut être ramené à la phrase suivante.

> Gauss was quite uninterested in the products of the so-called classical and romantic schools of German literature-both the emotional enthusiasm of the latter and the upper middle class elitism of the former were quite foreign to his world and experiences.[79]

[73] Isaiah Berlin, *loc. cit*

[74] voir par exemple : André Weil, *Number theory, an approach through history from Hammurapi to Legendre*

[75] The Mathematical Genealogy Project nous informe que ceux qui n'étaient dans la lignée de Gauss sont dans la lignée de Dirichlet et Jacobi, tous deux profondément sous l'influence de Gauss.

[76] Pour l'activité considérable en France au 19ème siècle en théorie des nombres, voir la série de travaux de Catherine Goldstein. Mais il s'agit de recherches de nature différente de celles de l'école allemande, et dont l'héritage est moins important. C'est pourquoi nous ne nous y intéressons pas ici.

[77] W.K. Bühler, *Gauss a biographical Study.*

[78] *loc. cit.*

[79] *loc. cit.*

En effet, une indication de la mentalité de Gauss réside dans sa prédilection, parmi tous les écrivains, pour son contemporain Jean Paul.

> His favorite German author was Jean Paul (1763–1825). Some people have been surprised at this fact, but upon closer examination the reasons stand out clearly. Gauss appreciated Jean Paul's great wealth of similes, his depth of intellect, and his inexhaustible humor. He was the best-seller of his day—more widely read than Goethe and Schiller. Jean Paul and Gauss both manifested the same polarity between rationalism and romanticism. As a young man he reveled in the beautiful descriptions found in Jean Paul's works. He enjoyed the sentimental and patriotic elements of Jean Paul's writing; he was firmly attached to his fatherland and his people, not the aristocracy, royalty, or nobility, but the small-time, everyday folks.[80]

Jean Paul, qui n'était pas membre du Cercle d'Iéna, est souvent classé parmi les Romantiques. Il était ami de Herder déjà cité comme précurseur du Romantisme.

La polarité notée par G. Waldo Dunnington se retrouve dans l'attitude de Gauss en sciences. José Ferreirós récapitule quelques devises adoptées par Gauss[81], la première mise en avant par Ferreirós est

> *Ο Θεοσ Αριθμητιζει*

c'est-à-dire «Dieu arithmétise». Nous comprenons une telle déclaration comme proche de l'idée que les nombres sont le langage de la nature, ce qui constitue plutôt une attitude rationaliste. Nous rencontrons Shakespeare une seconde fois, puisque Gauss lui emprunte sa seconde devise, tirée de *King Lear* :

> Thou, nature, art my goddess;
> To thy laws my services are bound.[82]

Nous pouvons en déduire que, comme les Romantiques, et peut-être grâce à eux, Gauss était familier avec Shakespeare.

Quant au sens de cette seconde devise, dans la tragédie elle-même, il s'agit de la proclamation par Edmund que les lois inexplicables de la nature transcendent l'ordre social et légitiment sa prétention à la succession au détriment de son frère Edgar, héritier reconnu. Un tel contexte est inapplicable à Gauss, si bien qu'on ne saurait être certain du sens de cette devise. La formulation, hors de son contexte, nous apparaît comme un serment de fidélité semblable à une allégeance féodale, telle celle d'un chevalier qui prête son épée à une cause, à son suzerain ou à la dame de ses pensées. De façon plus prosaïque, on peut la voir comme un engagement à une éthique professionnelle.

À notre connaissance, un seul lien direct est attesté entre Gauss et le Romantisme. Il est rapporté par Dunnington ; il s'agit d'une visite de A. W. Schlegel, que nous avons déjà rencontré comme fondateur du Cercle d'Iéna, comme traducteur de Shakespeare, comme compagnon de Madame de Staël, en 1813[83].

Poursuivons dans les jugements nuancés. Dunnington note sur le tempérament de Gauss.

> Although a serene man of science. Gauss attained such objectivity and calmness not without struggle. There was a streak of the mystic and Romantic in him, which sometimes penetrated the hard outer shell of logical reserve, Newton, Descartes, Pascal, Gauss, Helmholtz, and certain others were "pious," but their faith varied in degree.[84]

Lors de la leçon inaugurale depuis la chaire d'astronomie de l'observatoire de Göttingen, Gauss trouva judicieux de citer Jean Paul :

> Les étoiles, pour reprendre les mots de notre incomparable Jean Paul, sont là pour une raison plus élevée, pas seulement pour indiquer les distances et les directions aux navires qui ramènent du poivre[85], et les muses ont une raison d'être plus grande que de servir nos besoins.[86]

Ferreirós rattache une telle déclaration, non pas au Romantisme, mais au mouvement néo-humaniste qui influença le système d'éducation qui s'est mis en place aux alentours de 1800[87]. On reconnaît cette même philosophie dans un échange célèbre entre deux illustres géomètres que connaissait bien Gauss. Jacobi écrivit à Legendre :

---

[80] G. Waldo Dunnington *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science: A Study of His Life and Work.*

[81] José Ferreirós, *Ο Θεοσ Αριθμητιζει* : The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss, in *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer ed.

[82] *King Lear.* Acte 1, Scène 2

[83] G. Waldo Dunnington, *loc. cit.*

[84] G. Waldo Dunnington, *loc. cit.*

[85] Référence au commerce des épices.

[86] Die Sonnen sind, um mich eines schönen Worts unseres unvergleichlichen Jean Paul zu bedienen, zu etwas Höherem da, als bloss um zu Schrittzählern und Wegweisern für zurückkehrende Pfefferflotten zu dienen, und die Bestimmung der Musen ist eine höhere, als die, bloss Mägde unserer Bedürfnisse zu sein. Werke, vol. XII, Varia. Atlas des Erdmagnetismus, ed. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin: Julius Springer. Repr. Hildesheim, New York: Olms, 1981.

[87] José Ferreirós, *loc. cit.*

> [...] mais un philosophe comme lui [Fourier] aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.[88]

Bühler utilise ci-après le terme romantique en un sens large de «passionné et désintéressé», qui ne correspond guère à ce qui nous intéresse ici.

> But this disinterested penetration of nature as a serious, independent task was also a deeply romantic objective. Gauss never shared the humanistic and possibly shallow optimism of the Enlightenment. He was distrustful of mystical short-cuts (the trap of the "professional" romantic poets and philosophers) as well as classical idealism (leading to Goethe's antiscientific theory of color).[89]

La forme de romantisme décelée chez Gauss par Bühler est probablement la même que celle évoquée par Dunnington : elle réside dans l'idéalisation de la science, déjà affirmée dans les devises et citations qui précèdent.

Parmi les qualités de Gauss qui sont suscité l'admiration (ou le dépit) de ses contemporains et de ses successeurs, figure la forme aboutie de ses textes. Sa stratégie avant publication obéissait à une autre de ses devises : Pauca sed matura (peu mais mûrs), si bien que Niels Abel (1802-1829) disait de lui en constatant à quel point les textes achevés avaient effacés le cheminement de la pensée :

> Il faisait comme le renard, qui efface avec sa queue les traces de ses pas sur le sable.[90] [91]

Gauss en 1808 déplore la catastrophe que représentent les guerres napoléonniennes, en particulier le décès de son protecteur le Duc de Brunswick. Il lance une pique à la France, et à l'utilisation utilitariste de la science dans ce pays[92].

L'attitude scientifique de Gauss ne saurait être mieux rapportée que par Gauss lui-même.

> Ce n'est pas la connaissance, mais l'apprentissage, pas la possession, mais le chemin vers le but, qui procure la plus grande joie. Dès lors que j'ai clarifié et épuisé un sujet, je m'en détourne, pour me diriger vers l'obscurité à nouveau. L'homme qui ne connaît jamais la satisfaction est bien étrange ; s'il a achevé une construction, ce n'est pas pour y résider en paix, mais pour en entamer une autre. J'imagine les sentiments du conquérant du monde tels ceux de celui, qui, après qu'un royaume eut à peine été conquis, étend déjà ses bras pour s'emparer de quelques autres.[93] [94]

C'est à garder en mémoire, et à comparer à un célèbre texte de Weil rapporté ci-dessous.

Notre enquête sur l'influence du Romantisme sur Gauss n'apporte à ce point qu'un résultat plutôt négatif. Les éléments romantiques perçus par Bühler et Dunnington semblent consister en une haute idée de la science – pas à un attachement aux extravagants idéaux Romantiques. En quel sens Dunnington perçoit des tendances mystiques chez Gauss est mystérieux pour nous. À supposer que la question du Romantisme soit pertinente pour comprendre Gauss et son œuvre, ce que l'on peut se demander au vu de l'envergure d'un tel esprit, il nous faudrait pour parvenir à une conclusion plus ferme procéder autrement qu'en collectant des citations choisies suivant les inclinaisons de celui qui à une thèse à établir[95] [96]. Il nous paraît clair que Gauss n'était pas un adhérent fervent, ni même un sympathisant au mouvement, qu'il ne fréquentait pas le Cercle d'Iéna, qu'il gardait ses distances avec l'irrationalité des Romantiques – mais aussi avec avec le progressisme des Lumières.

S'il y a un lien significatif entre les Romantiques et Gauss, tout au plus pourrait-on l'attribuer, suivant la suggestion de Mumford, à l'influence intangible du Zeitgeist. Peut-être est-ce l'air du temps qui a fait du jeune Gauss un chercheur si passionné dans les années 1790, alors même que les Romantiques d'Iéna, dans les mêmes années, exploraient de nouvelles perspectives dans les lettres, les arts et la philosophie ?

Il nous manque l'examen d'une question capitale : ce qui, en mathématiques, a tant passionné Gauss au cours de ces années.

---

[88] Lettre de Jacobi à Legendre datée du 2 juillet 1830.

[89] W.K. Bühler, *loc. cit.*

[90] Er macht es wie der Fuchs, der wischt mit dem Schwanze seine Spuren im Sande aus

[91] Cette phrase a une histoire compliquée : Abel semble avoir répété l'opinion d'un étudiant allemand.

[92] «...es ist wohl völlig gewiss, dass gerade diese Denkart mit dem Unglück, was in den letzten Zeiten so viele Staaten betroffen hat, in einem sehr genauen Zusammenhange steht...» cité dans José Ferreiros, *loc. cit.*

[93] Ma traduction de «Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt. Wenn ich eine Sache ganz ins Klare gebracht und erschöpft habe, so wende ich mich davon weg, um wieder ins Dunkle zu gehe; so sonderbar ist der nimmersatte Mensch, hat er ein Gebäude vollendet so ist es nicht um nun ruhig darin zu wohnen, sondern um ein andres anzufangen. So stelle ich mir vor muss dem Welteroberer zu Muthe seyn, der nachdem ein Königreich kaum bezwungen ist, schon wieder nach andern seine Arme ausstreckt.»

[94] Lettre à Farkas Bolyai datée du 2 septembre 1808.

[95] Il semble que la bibliothèque de Göttingen ait conservé trace des emprunts de Gauss. Nous n'avons pas consulté ces archives, par exemple.

[96] Inexplicablement, la page Wikipedia *Romanticism in science* affirme que Gauss était le plus grand mathématicien romantique. Mais cette affirmation est étayée par une seule source, c'est-à-dire l'ouvrage collectif Bossi and Poggi, ed. *Romanticism in Science*. Or un seul chapitre de cet ouvrage évoque Gauss, mais il ne fait aucune mention du romantisme.

8 L'ensorcellement de Gauss

Les premières recherches de Gauss portent sur la théorie des nombres, et trouvent leur couronnement dans la publication des *Disquisitiones Arithmeticae* en 2001. La rédaction des *Disquitiones* était achevée dès 1798, alors que Gauss était âgé de 21 ans. Cette précocité prodigieuse est mentionnée ici, non pour souligner encore une fois le talent exceptionnel de Gauss, mais parce qu'elle soulève la question de la maturité intellectuelle générale d'un homme à ce jeune âge.

Nul défaut de maturité ne paraît dans la préface de ce livre. Au contraire, Gauss semble lucide concernant la place de ses recherches dans l'histoire de la théorie des nombres, depuis Diophante en passant par Fermat, Euler, Lagrange et Legendre (voir ci-dessous). On peut lui reconnaître de la hauteur de vue dans sa perception de la profondeur du sujet. En témoigne l'analyse de Weil lorsque ce dernier écrit :

> The greatness of Gauss lies in his having brought to completion what his predecessors had initiated, no less than in his inaugurating a new era in the history of the subject.[97]

Les prédécesseurs modernes auxquels Weil fait allusion sont précisément ceux nommés par Gauss dans la préface des *Disquisitiones* : Fermat, Euler, Lagrange et Legendre. Après avoir affirmé avec insistance que la théorie des nombres ne se réduit pas aux problèmes diophantiens, Gauss écrit :

> On voit par là que l'on doit distinguer deux parties dans l'Arithmétique, et que les considérations dont nous venons de parler se rapportent à l'Arithmétique élémentaire, tandis que les recherches générales sur les affections particulières aux nombres entiers sont revendiquées par l'*Arithmétique transcendante*.[98] [99]

L'objet des recherches de Gauss est cette Arithmétique transcendante (Arithmeticae Sublimiori), bien distincte des questions diophantiennes, et qui, contrairement à l'arithmétique élémentaire, contient des vérités profondes. Le lecteur pourra consulter l'ouvrage publié par C. Goldstein, N. Schappacher and J. Schwermer pour une analyse détaillée du contenu et de l'influence des *Disquisitiones* [100]. Peu d'ouvrages ont suscité tant de révérence, et sur une aussi longue période, dans l'histoire des mathématiques.

Nous retiendrons la réaction d'un lecteur français, avant même la traduction en français des *Disquisitiones* en 1807, un certain Monsieur Le Blanc, qui prit l'initiative d'écrire à Gauss dès 1804. La lettre commence par cette phrase :

> Vos Disquisitiones Arithmeticae font depuis longtems l'objet de mon admiration et de mes études.[101]

Monsieur Le Blanc est bien sûr le pseudonyme de Sophie Germain (1776-1831). Il est remarquable que les mathématiciens installés en France n'aient pas poursuivi dans la lignée de Gauss, comme si un certain état d'esprit les en avaient détournés. Goldstein et Schappacher expliquent un tel état de fait par le statut secondaire des mathématiques pures en comparaison de l'astronomie et de la physique mathématique[102]. Cela rejoint le reproche formulé par Gauss sur l'utilitarisme français par opposition à la science pure. Germain, quant à elle, était une chercheuse indépendante et avait tout loisir de se tourner vers les sujets suivant ses goûts propres. Elle ajoute en 1807, après avoir dévoilé son identité, et alors que les troupes françaises sont en Allemagne :

> La reconnaissance que je vous dois pour l'encouragement que vus m'avez accordé, en me témoignant que vous me comptiez au nombre des amateurs de l'arithmétique sublime dont vous avez développé les mystères, était pour moi un motif particulier de m'informer de vos nouvelles, dans un moment où les troubles de la guerre pouvaient inspirer quelques craintes et j'ai appris avec une véritable satisfaction que vous étés resté dans vos foyes aussi tranquille que les circonstances le permettaient: je crains cependant que les suites de ces grands événements ne nous privent encore longtemps des ouvrages que vous préparez sur l'astronomie et sourtout de la continuation de vos recherches arithmétiques, car cette partie de la science a pour moi un attrait particulier et j'admire toujours avec un nouveau plaisir l'enchainement des vérités exposées dans votre livre: malheureusement la faculté de penser avec force est un attribut reservé à un petit nombre d'esprits privilégiés et je suis bien sure de ne rencontrer aucun des développements qui, pour vous semblent une suite inévitable de ce que vous avez fait connaître.[103]

---

[97] André Weil, *Number theory, an approach through history from Hammurapi to Legendre*

[98] e re esse videtur, duas Arithmeticae partes distinguere, illaque ad Arithmeticam elementarem referre, omnes autem disquisitiones generales de numerorum integrorum affectionibus propriis Arithmeticae Sublimiori, de qua sola hic sermo erit, vindicare.

[99] Carolo Friderico Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Préface

[100] *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer ed

[101] Lettre de Germain à Gauss datée du 21 novembre 1804, reproduite dans Andrea Del Centina · Alessandra Fiocca, The correspondence between Sophie Germain and Carl Friedrich Gauss, *Arch. Hist. Exact Sci.* (2012) 66:585–700

[102] Catherine Goldstein et Norbert Schappacher, *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer ed

[103] Lettre de Germain à Gauss datée du 20 février 1807, reproduite dans *loc. cit.*

Le renoncement de Germain à poursuivre à la suite de Gauss est à l'image de l'orientation des mathématiques française à cette époque[104].

La divergence se prolonge tout au long du 19ème siècle. Ainsi, la France, grand pays de mathématiques qui avait donné naissance ou accueilli Fermat, Legendre, Lagrange, théoriciens des nombres qui avaient précédé Gauss, s'est concentrée sur l'analyse et la géométrie durant cette période. Même si les Disquisitiones ont eu quelques lecteurs en France, tels que Galois, Legendre et d'autres, dans ce pays, le seul continuateur important au 19ème siècle dans la ligne tracée par Gauss est Hermite.

Aucune date particulière ne marque la fin du Romantisme, mais les critiques considèrent qu'il n'était plus d'actualité vers le milieu du 19ème siècle. Goldstein et Schappacher constatent un effet générationnel similaire et un déclin de la théorie algébrique des nombres pendant la période qui a suivi.

> Carl Friedrich Gauss died on February 2, 1855. Jacobi had died almost exactly four years earlier, and Eisenstein in 1852. Cauchy died in 1857. Dirichlet became Gauss's successor in Göttingen, and died in 1859. Kummer, for his part, was then turning to geometry, publishing only an occasional number-theoretical paper. In France, Hermite's research was shifting to invariant theory and differential equations. Thus, the erstwhile proud and active leading group of European researchers in the domain opened up by the Disquisitiones Arithmeticae was decimated dramatically by the 1860s.[105]

Nous nous retrouvons bien plus tard pour évaluer l'héritage de Gauss, avec l'introduction du *Zahlbericht* de Hilbert, écrite vers 1897. Nous y voyons un témoignage capital sur l'attrait de la théorie des nombres pour Gauss, et pour ses successeurs du 19ème siècle jusqu'à Hilbert.

> Nous nous rappelons aussi combien notre maître Gauss tenait en honneur la science arithmétique. Dès que, pour la première fois, il eut trouvé à souhait une démonstration d'une remarquable vérité arithmétique, «le charme de ces recherches l'avait tellement ensorcelé que, désormais, il ne put plus les laisser» Il prisait Fermat, Euler, Lagrange et Legendre «comme des hommes d'une gloire incomparable, car ils ont ouvert les portes du sanctuaire de cette science divine et ont montré ce qu'il contient de richesses.»[106] C'est une particularité de la théorie des nombres que la difficulté de la démonstration de certaines vérités simples découvertes facilement par voie d'induction. «Et précisément ce qui donne à l'Arithmétique supérieure» dit Gauss, «ce charme magique qui bien fait la science préférée des géomètres, c'est de ne pas douter de ses richesses inépuisables qui surpassent celles de toutes les autres parties des mathématiques[107].» [108] [109]

Bien des arithméticiens, et des acteurs de la popularisation des mathématiques, approuvent le jugement de Gauss ici rapporté par Hilbert : l'attrait de la théorie des nombres réside, en partie au moins, dans le contraste marqué entre simplicité des énoncés et difficulté des démonstrations. Et bien des arithméticiens ajouteraient que la profondeur de la théorie des nombres ne réside pas intrinsèquement dans la difficulté de ces démonstrations, mais plutôt dans le fait que ce contraste est l'indication de l'existence d'un vaste monde structuré que l'on devine et qui est invisible à un examen superficiel. Nous le verrons ci-dessous.

La dernière phrase citée par Hilbert fait écho à une célèbre formule rapportée par Sartorius von Waltershausen (1809-1876) en 1856, c'est-à-dire après la mort de Gauss :

> Pour reprendre ses propres mots, Gauss considérait les mathématiques comme la reine des sciences et l'arithmétique comme la reine des mathématiques.[110]

---

[104] Nous pouvons indiquer un témoignage indirect sur la réputation dont jouissais les parties des mathématiques en France autour de 1800. Le comte Jan Potocki a écrit en français son grand roman *Le Manuscrit trouvé à Saragosse* au début du 19ème siècle. Il a de toute évidence fréquenté les mathématiciens de son temps à Paris. Le roman dresse un portrait d'une justesse étonnante des mathématiciens. Dans le roman, un encyclopédiste établit une liste ordonnée en cent volumes des domaines du savoir de ce temps. Six volumes sont consacrés aux mathématiques : la logique (numéro 65), la géométrie (numéro 81), l'arithmétique (numéro 82), l'algèbre (numéro 83), la trigonométrie (numéro 84), «enfin le centième volume était consacré à l'analyse qui selon Hervas était la science des sciences et la dernière borne de l'esprit humain...»

[105] Catherine Goldstein et Norbert Schappacher. Several Disciplines and a Book (1860–1901), *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer ed

[106] Cette phrase est tirée de la préface des *Disquisitiones*

[107] Cette dernière phrase de Gauss n'est pas tirée des *Disquisitiones*, mais d'une conférence donnée en 1808 à l'Académie des sciences de Göttingen.

[108] Weiter erinnern wir uns, welche Verehrung unser Meister Gauss für die arithmetische Wissenschalt empfand, wie, als ihm zuerst der Beweis einer ausgezeichneten arithmetischen Wahr- heit nach Wunsch gelungen war, „ihn die Reize dieser Unter- suchungen so umstrickten, dass er sie nicht mehr lassen konnte", und wie er Fermut, Euler, Lagrange und Legendre als „Männer von unvergleichlichem Rulme" preist, weil sie „den Zugang zu dem Heiligtume dieser göttlichen Wissenschaft erschlossen und gezeigt haben, von wie grossen Reichtümern es erfüllt ist". Eine besondere Eigentümlichkeit der Zahlentheorie bildet die olt entgegentretende Schwierigkeit der Beweise einfacher und durch Induction leicht entdeckter Wahrheiten. „Gerade dieses ist es", sagt Gauss, „was der höheren Arithmetik jenen zauberischen Reiz giebt, der sie zur Lieblingswissenschaft der ersten Geometer ge- macht hat, ihres unerschöpflichen Reichtums nicht zu gedenken, woran sie alle anderen Teile der Mathematik so weit übertrifft."

[109] Introduction à David Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*

[110] Die Mathematik hielt Gauss um seine eigenen Worte zu gebrauchen, für die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik für die Königin der Mathematik.

Une telle affirmation, ainsi que la première devise de Gauss, sont éclairées par le passage suivant, où on perçoit l'influence de Kant :

> Je suis de plus en plus convaincu que la nécessité de notre géométrie ne peut être prouvée, du moins pas par l'esprit humain ou pour l'esprit humain. Peut-être que dans une autre vie, nous parviendrons à d'autres idées sur la nature de l'espace qui nous sont actuellement inaccessibles. D'ici là, il ne faudrait pas placer la géométrie au même niveau que l'arithmétique, qui est purement a priori, mais plutôt la mécanique.[111] [112]

De nos jours, la théorie des nombres et la géométrie ont le même statut épistémique dans les mathématiques. La distinction de Gauss n'a pas résisté au passage du temps. Vue au travers du prisme anti-fondationnaliste des Romantiques, l'arithmétique apparaît, dans l'esprit de Gauss, comme bien fondée, alors que la géométrie, pour reprendre l'expression de F. Schlegel, «commence au milieu». Mais, en accord avec notre point de vue selon lequel l'absence de fondation en philosophie a pour correspondant en mathématique l'absence de théorie totalisante, cela n'est pas tellement important pour nous, car ce n'est pas la distinction de Gauss qui fait de l'arithmétique cette «science divine».

Pour voir au delà de Hilbert comment le charme fait une nouvelle fois son effet, cette fois ci sur Weyl, ce «bon romantique», on trouve ce témoignage de l'intéressé :

> Dès la fin de ma première année, j'emportai son Zahlbericht sous mon bras et passai les vacances à le lire d'un bout à l'autre, sans aucune notion préalable de théorie des nombres ni de théorie de Galois. Ce furent les mois les plus heureux de ma vie...[113]

La prétention à la royauté de l'arithmétique ne fait pas l'unanimité. Henri Poincaré (1854-1912), contemporain de Hilbert, et peut-être en réponse à ce dernier, ne voit point de charme magique, mais un dénuement de structures et de grandes idées directrices, perpétuant ainsi la divergence nationale du début du 19ème siècle.

> L'analyse nous déroule des perspectives infinies que l'arithmétique ne soupçonne pas : elle nous montre d'un coup d'œil un ensemble grandiose dont l'ordonnance est simple et symétrique ; au contraire, dans la théorie des nombres où règne l'imprévu, la vue est pour ainsi dire arrêtée à chaque pas.[114]

Qu'est-ce que Poincaré entend ici par théorie des nombres ? S'il s'agit des questions diophantiennes, il est en accord avec Gauss, qui déclarait au sujet du théorème de Fermat qu'il s'agit d'un problème sans grand intérêt, car on pourrait formuler une foule de problèmes analogues qu'on ne saurait aborder. Mais comme Poincaré était disciple d'Hermite, et au vu de sa stature, il est difficile d'imaginer qu'il ignorait le contenu substantiel de la théorie des nombres de Gauss et Hilbert. C'est donc en connaissance de cause qu'il dévalue l'arithmétique au profit de l'analyse.

Quel sortilège a donc opéré, pour qu'un jeune homme se soit lancé vers 1792, date à laquelle il était âgé de 15 ans, avec tant de passion et tant de succès dans ses recherches en arithmétique qu'en 1798, lorsque les *Disquisitiones* étaient achevées, Gauss avait dépassé de loin tous ses prédécesseurs et contemporains ?

9 La baguette magique de l'analogie

Notre but est maintenant de cerner ce charme magique évoqué par Gauss, repris par Hilbert et nié par Poincaré. Il nous semble qu'il a trouvé une expression plus claire et plus forte au vingtième siècle. Revenons encore à Weil, mathématicien français, fin connaisseur de l'histoire de la théorie des nombres, tout spécialement de celle de Gauss et de sa descendance, principalement en Allemagne. Il était l'un des pionniers, avec Jacques Herbrand (1908-1931) et Chevalley, de l'importation et de la continuation de cette tradition en France entre les deux guerres. Tous trois avaient séjourné à Göttingen, où se trouvait depuis Gauss le plus grand centre de mathématiques en Allemagne, et qui constituait ce que Weil appelait the «clearing house of mathematics» dans le monde, avec la présence notamment de Hilbert[115]. L'admiration que Weil portait à Gauss est évidente, et elle apparaît dans un texte écrit en 1947, de façon un peu polémique (Elle fait suite à un siècle et demi de travail qui a mené de la loi de réciprocité quadratique à la théorie du corps de classes) :

[111] Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Noth- wendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom men- schlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raumes, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen.

[112] Lettre à Heinrich Wilhelm Matthias Olbers, daté d'avril 1817. Werke, vol. VIII, Arithmetik und Algebra: Nachträge zu Band 1–3, ed. König- liche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig: Teubner. Repr. Hildes- heim, New York: Olms, 1981.

[113] Cité par Weil et Chevalley, *loc. cit*

[114] Henri Poincaré. 1897. Les rapports de l'analyse et de la physique mathématique. *Acta Mathematica* 21, 331–341. Repr. Revue générale des sciences pures et appliquées 8, 857–861. Repr. in L'analyse et la recherche, ed. G. Ramunni. Paris: Hermann, 1991.

[115] Voir Claude Chevalley et André Weil, *loc. cit.*

> [...] car jusqu'ici, pour amples que soient nos généralisations des résultats de Gauss, on ne peut dire que nous les ayons vraiment dépassés.[116]

Ensorcelé, comme l'avait été Gauss, Weil évoque lui aussi la magie dans ce commentaire en introduction à son *Basic Number Theory.*

> In the days of Dirichlet and Hermite, and even of Minkowski, the appeal to "continuous variables" in arithmetical questions may weIl have seemed to come out of some magician's bag of tricks.[117]

En effet, Dirichlet écrivait :

> La méthode que j'emploie me paraît surtout mériter quelque attention par la liaison qu'elle établit entre l'Analyse infinitésimale et l'arithmétique transcendante[118].[119]

L'arithmétique transcendante est bien sûr le terme employé par Gauss dans les *Disquisitiones.* Quant à expliquer le charme qu'elle exerce, point d'argument rationnel pour Weil :

> Housman, the English poet, once got one of those silly letters of inquiry from some literary magazine, asking him and others to define poetry. His answer was: if you ask a fox-terrier to define a rat, he might not be able to do it, but when he smells one he knows it. When I smell number theory, I think I know it, and when I smell something else, I think I know it too.[120]

On retrouve là les préceptes de Hamann de connaissance par les voies irrationnelles. Sur l'usage de ces dernières en mathématiques, le plus célèbre texte de Weil est une lettre envoyée à sa sœur Simone Weil (1909-1943) en 1940. En 1960, le contenu de cette lettre réapparaît dans un nouveau texte de Weil, qui contient le passage suivant.

> Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illlusion se dissipe; le pressentiment se change en certitude; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaitre; comme l'enseigne la Gita[121] on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.[122] [123]

En dépit de la formulation élégante via les vocabulaires érotique et mystique, il nous semble qu'il s'agit là d'une reformulation (consciente ?) de la réflexion de Gauss ci-dessus qui assimile le mathématicien au conquérant d'une série de royaumes, passant de l'excitation de la conquête au désintérêt avant une autre conquête. À la fois Gauss et Weil semblent considérer qu'avec la dissipation de l'illusion, la raison a conquis la nature, contrairement au credo romantique – mais chaque conquête est un prélude à une nouvelle entreprise, si bien qu'il n'y a pas de conquête finale. Une différence se présente toutefois : Gauss ne mentionnait pas les frissons procurés par les «obscures analogies».

Gauss était pourtant sensible aux analogies. En effet, Goldstein et Schappacher notent à la lecture des *Disquisitiones* :

> Gauss himself insisted on the analogy between what we call cyclic components of class groups and the multiplicative structure of residues modulo a prime number: «The proof of the preceding theorem will be found to be completely analogous to the proofs of arts. 45, 49, and the theory of the multiplication of classes actually has a very great affinity in every respect with the argument of sec. 3.54»[124].[125]

[116] André Weil. L'avenir des mathématiques, *Œuvres Scientifiques / Collected Papers.* Springer Collected Works in Mathematics (in English, French, and German). Vol. 1 (1926–1951) (2nd printing ed.). Springer.

[117] André Weil, *Basic Number Theory.*

[118] Dirichlet fait sans doute allusion à son théorème de la progression arithmétique, prouvé par voie analytique

[119] Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, Journal für die reine und angawandte Mathematik, 18 (1838), p. 259-274.

[120] André Weil, Two lectures on Number Theory, past and present,*Œuvres Scientifiques / Collected Papers.* Springer Collected Works in Mathematics (in English, French, and German). Vol. 3 (1926–1951) (2nd printing ed.). Springer.

[121] L'univers mental dans lequel se place Weil, celui de la métaphysique indienne, est bien différent de celui des Romantiques, ou même de la philosophie allemande. Mais il n'était pas si extraordinaire, puisque, par exemple, A.W. Schlegel, indianiste renommé, a édité la *Bhagavad-Gita* avec une traduction en latin, et que son frère Friedrich a étudié les grammaires comparées du sanskrit et des langues indo-europénnes.

[122] Un passage souvent cité dans le monde de la théorie des nombres moderne. Nous espérons que nos lecteurs ne soupirent pas.

[123] André Weil, De la métaphysique aux mathématiques *Œuvres Scientifiques / Collected Papers.* Springer Collected Works in Mathematics (in English, French, and German). Vol. 2 (1964–1978) (2nd printing ed.). Springer.

[124] L'affinité constatée par Gauss est expliquée par les théories modernes : la notion de groupe de classe de rayon, ou encore la théorie de Kummer. Goldstein et Schappacher considèrent que l'analogie réside dans la notion de cyclicité.

[125] Catherine Goldstein et Norbert Schappacher. A Book in Search of a Discipline (1801–1860) in *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer ed

Nous ignorons s'il existe d'autres exemples d'une pareille sensibilité dans l'œuvre de Gauss

En complément, le lecteur intéressé par le paragraphe de Weil pourra consulter la rédaction d'une conférence de Mazur laquelle comprend bien des sujets en commun avec ceux que nous traitons ici ; en particulier, Mazur exprime ses différences d'opinion et d'interprétation avec Weil, notamment sur l'indifférence qui résulte de la connaissance[126].

Si l'on en croit Novalis, les analogies constituent un moyen irremplaçable pour parvenir à la sagesse et à la connaissance. D'où la formule, introduite et utilisée à de multiples reprises par ce dernier : «la baguette magique de l'analogie». Cela donne ce qui suit, dans le champ de l'Histoire.

> Je vous engage à l'étude de l'Histoire, à rechercher dans sa cohérence instructive la recherche de moments parallèles et à apprendre l'usage de la baguette magique de l'analogie. [127] [128] [129]

Comme pour nombre d'autres citations, nous ne reproduisons pas ces écrits pour en approuver la pertinence, mais parce que nous y voyons un témoignage sur un état d'esprit qui nous intéresse. En l'occurence, cette phrase de Novalis est extraite d'un pamphlet politique, sans guère de conséquence philosophique. Mais la proposition de Novalis de rechercher, comprendre et interpréter les analogies concerne tout autant la sphère métaphysique.

Le passage de Weil est préliminaire à l'exposé d'un parallèle entre deux théories (les surfaces de Riemann et les corps de nombres), qui se trouve complété par une théorie intermédiaire : les corps de fonctions sur les corps finis. Pour illustrer l'importance de cette analogie, qui remonte au moins à Dedekind, voire à Gauss, mais qui a été largement popularisée par Weil, à tel point Christophe Soulé (1951-) ouvre un exposé au séminaire Bourbaki en 1989 ainsi sans causer la moindre perplexité dans l'assistance :

> L'analogie entre les corps de fonctions et les corps de nombres est depuis longtemps une voie royale de l'arithmétique.[130]

La manifestation principale de cette analogie est le parallélisme des «grands problèmes», et quelquefois des grands théorèmes. C'est un passage obligatoire pour les questions qui apparaissent en arithmétique (la recherche moderne en produit sans cesse de nouvelles, mais on peut s'en tenir à l'exemple de l'hypothèse de Riemann), de trouver leur analogue, dont la formulation est parfois, mais pas toujours, évidente dans les corps de fonctions. Même lorsque les formulations des problèmes sont identiques dans chaque cadre, il n'en va pas de même de la difficulté des résolutions, si bien que ce que l'on sait d'un coté n'est quelquefois que ce que l'on espère de l'autre ; ainsi, pour citer l'exemple le plus célèbre, l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis est résolue (par Weil lui-même en général, et même, dans un cas particulier, par Gauss), à la différence de l'hypothèse de Riemann originelle.

Au vu de notre intérêt pour la rationalité de l'obtention de la connaissance, nous pouvons nous arrêter sur cette situation. Il n'y a pas de dépendance logique entre l'hypothèse de Riemann dans un cadre et dans l'autre. Pourtant la résolution pour les courbes pour les corps finis est souvent considérée comme une raison de croire en l'hypothèse de Riemann[131]. S'agit-il là du précepte Hamannien de la connaissance par la foi ? Ou, pour reprendre Pinker, d'une croyance sans bonne raison ?

10 Face à la marée montante

Depuis Poincaré, d'autres figures importantes ont confessé leur peu de goût pour la théorie des nombres. C'est le cas d'Alexandre Grothendieck (1928-2014) qui énonce ses préférences, avec une justification bien différente :

> C'est dire que s'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni «le nombre», ni «la grandeur», mais toujours la forme.[132]

En citant cette assertion, nous ne nous intéressons guère ici à l'attitude et à la place particulières de Grothendieck dans les mathématiques du vingtième siècle. En particulier, si nous cherchons à démontrer que Grothendieck n'était pas romantique, c'est en un sens très particulier. Il s'agit pour nous de préparer la scène pour l'échange suivant, qui nous semble illustrer le plus pleinement le propos du présent texte. Dans l'une des dernières lettres qu'ils ont échangées, Grothendieck était interrogé par Jean-Pierre Serre (1926-) ainsi :

[126] Barry Mazur, The Faces of Evidence (in Mathematics), conférence donnée au Museion du MSRI. Voir https://people.math.harvard.edu/ mazur/papers/Faces.of.Evidence.Points.for.Museion.pdf.

[127] Il est ironique que l'entreprise de Mumford, et la notre ici, réponde à l'injonction de Novalis.

[128] An die Geschichte verweise ich euch, forscht in ihrem belehrenden Zusammenhang, nach Änlichen Zeitpunkten, und lernt den Zauberstab der Analogie gebrauchen.

[129] Novalis, *Die Christenheit oder Europa.*

[130] Christophe Soulé, Géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques, *Séminaire Bourbaki : volume 1988/89*, exposés 700-714, Astérisque, no. 177-178 (1989), Exposé no. 713, 17 p.

[131] Il existe d'autres raisons de croire en l'hypothèse de Riemann. Par exemple, l'étude numérique de la fonction ζ. Mais nombre de mathématiciens sont davantage convaincus par les analogies que par de tels arguments empiriques.

[132] Alexandre Grothendieck, *Récoltes et semailles.*

> Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théories générales. Très bien : c'est là ta façon de travailler, et ce que tu as fait montre que cela marche effectivement. Du moins pour les EVT et la géométrie algébrique... C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres (où les structures en jeu sont loin d'être évidentes – ou plutôt, où toutes les structures possibles sont en jeu) ; mêmes réserves pour la théorie des formes modulaires, visiblement plus riche que son aspect «groupes de Lie» et son simple aspect «géométrie algébrique – schémas de modules». D'où la question : ne serais-tu pas arrivé, vers 1968-1970, à te rendre compte que la méthode «marée montante» était impuissante contre ce genre de problèmes, et qu'il fallait changer de style – ce qui te déplaisait ?[133]

Avec les transpositions qui s'imposent, on peut voir ici Serre dans le rôle de Hamlet s'adressant à Grothendieck jouant Horatio («more things in heaven and earth... than are dreamt in your philosophy»).

L'idée avancée par Serre selon laquelle les structures en jeu sont loin d'être évidentes est un écho parmi bien d'autres au lien étonnant et imprévu entre l'analyse infinitésimale et l'arithmétique transcendante que Dirichlet a souligné ci-dessus. C'est là précisément l'illustration du «bag of tricks» des arithméticiens du 19ème siècle. C'est pourquoi, dans une telle perspective, aucune marée montante ne peut engloutir tous les problèmes de l'arithmétique.

Nous allons présenter une autre illustration, nous l'espérons également frappante. Indiquons d'abord le contexte. Vers 1990, la conjecture de modularité des courbes elliptiques a atteint une grande notoriété, car il est alors établi que sa résolution entraîne le théorème de Fermat. Dans un article adressé à un public général en 1991, Mazur se demande quelles méthodes permettront de démontrer une telle conjecture. Sa note en bas de page mérite d'être ici citée dans le corps de notre texte, non pour en évaluer la pertinence, mais parce qu'elle ouvre une fenêtre sur l'état d'esprit d'un arithméticien en face à un grand problème de son temps :

> It does not seem unnatural to look to differential geometry for progress with this conjecture, or to partial differential equations and the study of the eigenvalue problem for elliptic operators, or to the representation theory of reductive groups... . It would be no surprise if ideas from the classical theory of one complex variable and the Mellin transform were relevant, or of Algebraic Geometry... . But perhaps one should also look in the direction of Kac-Moody algebras, loop groups, or $\mathcal{D}$-modules, perhaps to ideas that have been, or will be, imported from Physics....[134] [135]

À la lecture de cette citation, on identifie Mazur au voyageur contemplant une mer de nuages peint par Friedrich. Tels Novalis et F. Schlegel ne se désolant pas de l'absence de premier principe à la philosophie, Mazur semble jubiler à la considération de l'éventail ouvert de possibilités face au problème qui se pose à lui. Il en résulte non la confusion, mais une grande stimulation des capacités créatrices de l'esprit.

L'ouverture épistémique fait partie de la vision Romantique du monde, à tel point qu'elle comprend les arts, notamment la poésie, puisque la portée de la seule raison est limitée. On peut la retrouver un analogue dans la philosophie de F. Schlegel.

> Si la connaissance de l'infini elle-même est infinie, donc toujours incomplète, imparfaite, alors la philosophie en tant que science ne peut jamais être achevée, fermée et parfaite ; elle ne peut que tendre vers ce but élevé et essayer par tous les moyens possibles de s'en rapprocher de plus en plus.[136] [137]

Nous terminons par l'énoncé d'un petit paradoxe. Nous avons considéré de fameux contributeurs à la théorie des nombres, parmi eux notamment : Gauss, Hilbert, Weil, Serre. Aucun de ces derniers n'a fait preuve d'obscurantisme, bien au contraire : il est notoire qu'ils ont œuvré pour établir et faire respecter des standards de clarté, et même pour fonder la recherche mathématique sur des bases plus solides qu'elle ne l'avait été jusqu'alors. Pourtant ils ont tous manifesté une prédilection pour cette partie des mathématiques où on se délecte des «obscures analogies, des troubles reflets d'une théorie à une autre, des furtives caresses, des brouilleries inexplicables».

---

[133] Lettre de Serre à Grothendieck, datée du 8 février 1986, *Correspondance Grothendieck-Serre*, Société Mathématique de France (SMF), 2001.

[134] La conjecture a pu être démontrée par Andrew Wiles *et al*, comme l'a noté Mumford ci-dessus, quelques années plus tard en s'appuyant sur les notions de théorie des déformations, de structures d'algèbres de Hecke, de propriétés des points de torsion de courbes elliptiques, pour lesquelles des avancées décisives étaient dues à... Mazur.

[135] Barry Mazur, (1991). Number Theory as Gadfly. *The American Mathematical Monthly*: Vol. 98, No. 7, pp. 593-610.

[136] Ist die Erkenntnis des Unendlichen selbst unendlich, also immer nur unvollendet, unvollkommen, so kann auch die Philosophie als Wissenschaft nie geendigt, geschlossen und vollkommen sein, sie kann immer nur nach diesem hohen Zielestreben, undalle mögliche Wege versuchen, sich ihm mehr und mehr zunähern. Sie ist überhaupt mehr ein Suchen, Streben nach Wissenschaft, als selbst eine Wissenschaft.

[137] Friedrich Schlegel, Historische Charakteristik der Philosophie nach ihrer sukzessiven Entwicklung.

11 Yuri Ivanovich Manin, *in memoriam*

Pour illustrer ce dernier point, nous donnons le dernier mot à Manin[138], non pas pour approuver la suggestion extraordinaire formulée dans les dernières lignes de son ouvrage *Mathématiques et Physique*, mais parce que le passage qui suit illustre la mentalité et les thèmes que nous souhaitons mettre ici en évidence : la notion selon laquelle l'activité du scientifique consiste à déchiffrer un cosmos organique au moyen de ressources intellectuelles pas entièrement rationnelles, telles que le sens de la beauté et le guide de l'intuition fourni par les analogies. Tout ce qui, en somme, séduit les Romantiques.

> En conclusion, j'aimerais dire quelques mots sur la théorie des nombres, un domaine des mathématiques hautement développé et d'une extraordinaire beauté, mais qui n'a pas encore trouvé d'application profonde aux sciences de la nature. [...] Voici maintenant un exemple plus moderne de théorème sur les nombres premiers. Désignons par $\tau(n)$ (le n-ième nombre de Ramanujan) le n-ième coefficient de la série obtenue par développement formel du produit infini $x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}$. Si p est premier alors $\tau(p) < 2p^{11/2}$. Il est totalement impossible de démontrer ce fait ici ; selon l'auteur de la preuve, Pierre Deligne, en supposant connu le programme de licence, il faudrait encore environ deux mille pages de texte. En mathématiques contemporaines ce théorème détient probablement le record du rapport de la longueur de la démonstration à celle de l'énoncé. Bien entendu, la démonstration a conduit à une meilleure compréhension de bien des choses intéressantes. Par exemple, pour démontrer cet énoncé on a créé une nouvelle et vaste théorie (la « cohomologie l-adique ») et on en a utilisé deux ou trois plus anciennes (groupes de Lie, fonctions automorphes, etc.). Il est remarquable que les idées les plus profondes de la théorie des nombres révèlent une ressemblance de grande portée avec les idées de la physique théorique moderne. Tout comme la mécanique quantique, la théorie des nombres fournit des schémas complètement non triviaux de relations entre le continu et le discret (séries de Dirichlet et sommes trigonométriques, nombres p-adiques, analyse non archimédienne, etc.) et met l'accent sur le rôle des symétries cachées (théorie du corps de classes, décrivant la relation entre les nombres premiers, groupes de Galois des corps de nombres algébriques, etc.). On se plaît à espérer que cette ressemblance n'est pas fortuite et que nous percevons déjà des paroles nouvelles à propos de l'Univers dans lequel nous vivons, sans toutefois en comprendre encore le sens.[139]

12 Remerciements

Quelques remerciements pour ceux qui nous ont apporté une aide pour la préparation de l'exposé. David Mumford nous a indiqué que les Romantiques sont les plus proches de l'une des quatre catégories de mathématiciens qu'il a définies : celle des «alchimistes»[140]. Nous avons eu beaucoup de chance de pouvoir nous adresser à Catherine Goldstein pour une foule d'indications sur Gauss, les mathématiques du 19ème siècle en France et en Allemagne. Paolo Tortonese nous a recommandé la lecture de Berlin, Eichner et Larmore. Et enfin, c'est là notre dette envers la musique, François-Bernard Mâche nous a naguère initié à Stendhal comme professeur de français au lycée en 1980/81 et nous précéda dans ce séminaire pour l'année consacrée au Romantisme. À la mention du lien entre théorie des nombres et Romantisme, nous l'avons entendu évoquer «L'arithmétique supérieure». Comme 42 ans plus tôt, rien ne semblait échapper à son esprit curieux.

[138]Manin est disparu le 7 janvier 2023, un mois avant l'exposé oral.

[139]Yuri I. Manin, Mathématiques et Physique dans *Les Mathématiques comme Métaphore*, Essais choisis, Belles Lettres, 2021.

[140]Voir le journal en ligne de Mumford https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2015/MathBeautyBrain.html. Si on suit sa suggestion, l'association Romantisme - arithmétique pourrait être mise en évidence via la mesure de l'activité neuronale.