

INTERROGATION du 19 octobre 2016

Durée : 30 minutes. Tout appareil électronique et tout document est interdit. Répondre ci-dessous et au verso en justifiant brièvement.

1. L'ensemble $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$ est-il un borélien de \mathbf{R} ?
 2. Quelle est la mesure de Lebesgue (notée μ) de l'ensemble $\cup_{n \geq 0} [1/2^{n+1}, 1/2^n]$?
 3. La fonction d'une variable réelle $x \mapsto e^{-x^2}$ est-elle mesurable ?
 4. Notons $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}}$ la fonction caractéristique des entiers dans \mathbf{R} . Calculer $\int \mathbf{1}_{\mathbf{Z}} d\mu$.
 5. La fonction d'une variable réelle $x \mapsto |x| \mathbf{1}_{\mathbf{Z}}(x)$ est-elle étagée ?
 6. Donner un exemple de fonction étagée $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ non nulle telle que $\int f d\mu = 0$.
 7. Pour n entier ≥ 1 , posons $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $f_n(x) = 1 + e^x(1 - x)/n$. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $\int f_n d\mu$.
-