

Nom :  
Université Paris Diderot  
Licence de Mathématiques

Algèbre  
Année 2015-16  
M. Livernet, L. Merel

### INTERROGATION du 3 décembre 2015

*Durée : 30 minutes. Tout appareil électronique et tout document est interdit. Répondre ci-dessous et au verso en justifiant brièvement.*

---

1. L'ensemble  $\{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 / a - b \in 2\mathbf{Z}\}$  est-il un sous-anneau de  $\mathbf{Z}^2$  ?
  2. L'anneau  $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$  est-il intègre ?
  3. Quelle est la caractéristique de l'anneau  $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$  ?
  4. Soit  $A$  un anneau. Soit  $a \in A$  tel que  $a^2 = 0$ . Montrer que  $1 + a$  est inversible dans  $A$ .
  5. Indiquer les éléments inversibles de  $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$ .
  6. Un anneau  $A$  de caractéristique 5 peut-il posséder un idéal  $I$  tel que l'anneau quotient  $A/I$  est de caractéristique 3 ?
  7. Quel est l'idéal de  $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$  engendré par  $\{\bar{3}, \bar{5}\}$ , où  $\bar{3}$  et  $\bar{5}$  sont les classes de 3 et 5 respectivement modulo 15 ?
-