

INTERROGATION du 2 décembre 2022

Durée : 45 minutes. Tout appareil électronique et tout document est interdit.

Notons \mathcal{S}_n le groupe symétrique sur n lettres. Soit $G = \{\sigma \in \mathcal{S}_6 / \sigma(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 3\}\}$ le stabilisateur de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (c'est aussi le stabilisateur de l'ensemble $\{4, 5, 6\}$).

1. Existe-t-il un groupe non abélien d'ordre 359 ?
2. Existe-t-il un groupe non abélien d'ordre 360 ?
3. Quelle est l'orbite de 1 sous G ?
4. L'action de G est-elle transitive sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
5. Montrer que G est isomorphe à $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$.
6. Quel est l'ordre du stabilisateur de 1 dans G ?
7. Le sous-groupe G est-il normal dans \mathcal{S}_6 ?
8. Quel est l'ordre d'un 3-sous-groupe de Sylow de \mathcal{S}_6 ?
9. Indiquer un tel sous-groupe de Sylow contenu dans G .
10. Le groupe G est-il isomorphe à $\mathcal{A}_4 \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$?