

INTERROGATION du 1er décembre 2023

Durée : 45 minutes. Tout appareil électronique et tout document est interdit.

Notons \mathcal{S}_n le groupe symétrique sur n lettres, et \mathcal{A}_n son sous-groupe alterné. Soit $G = \{\sigma \in \mathcal{S}_8 / \sigma(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\} \text{ ou } \sigma(\{1, 2, 3, 4\}) = \{5, 6, 7, 8\}\}$.

1. Quel est l'ordre de \mathcal{S}_8 ?
2. Le groupe \mathcal{S}_8 admet-il un élément d'ordre 15 ?
3. Montrer que G est un groupe.
4. Quelle est l'orbite de 1 sous G ?
5. Quel est l'ordre de G ?
6. Quel est l'ordre du stabilisateur de 1 dans G ?
7. Montrer qu'on a un morphisme injectif de groupes $\phi : \mathcal{A}_4 \times \mathcal{A}_4 \rightarrow G$?
8. Quel est l'ordre de l'image de ϕ ?
9. Montrer que cette image est normale dans G .
10. Indiquer un sous-groupe normal d'indice 72 de G ?