Université de Sciences et Technologie de Chine
Classe sino-française Année 2021-22

EXAMEN du 23 avril 2022

Durée : 3h

Les deux parties sont indépendantes. Les notes de cours sont autorisées.

I

Soit k un corps fini à q éléments. Soit n un entier ≥ 1. On dit que $P \in k[X_1, ..., X_n]$ est *réduit* si, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ le degré de P en X_i est $\leq q-1$. Notons R l'ensemble des polynômes réduits de $k[X_1, ..., X_n]$. Notons Γ_q l'idéal de $k[X_1, ..., X_n]$ engendré par $X_1^q - X_1$,..., $X_n^q - X_n$.

Pour I idéal de $k[X_1, ..., X_n]$, on note $V(I)$ l'ensemble algébrique affine (dans k^n) associé à un idéal I de $k[X_1, ..., X_n]$.

Pour V, un ensemble algébrique affine de k^n, on note $I(V)$ l'idéal des polynômes de $k[X_1, ..., X_n]$ qui s'annulent sur V.

On fixe I_0 un idéal de $k[X_1, ..., X_n]$.

1. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles algébriques affines dans k^n.
2. Montrer que tout polynôme irréductible de $k[X_1, ..., X_n]$ engendre un idéal radical de $k[X_1, ..., X_n]$.
3. Montrer qu'il existe V un ensemble algébrique affine de $k[X_1, ..., X_n]$ et une infinité d'idéaux radicaux distincts I de $k[X_1, ..., X_n]$ avec $V = V(I)$.
4. Montrer que R est un k-espace vectoriel de dimension q^n.
5. Soit $P \in R$ tel que $P(x_1, ..., x_n) = 0$ pour tout $(x_1, ..., x_n) \in k^n$. Montrer que $P = 0$.
6. Montrer que $k[X_1, ..., X_n] = R \oplus \Gamma_q$.
7. Montrer que $I(k^n) = \Gamma_q$.
8. Montrer que $I(V(I_0)) = I_0 + \Gamma_q$.
9. En déduire que $I_0 + \Gamma_q$ est un idéal radical de $k[X_1, ..., X_n]$.
10. Soit m un entier ≥ 1. Soit d un entier $< q$. Soient $P_1, ..., P_m$ de degré total $\leq d$. Posons $S = \sum_{i=1}^m P_i^{q-1} \prod_{j=i+1}^m (1 - P_j^{q-1})$. Montrer que $S(x_1, ..., x_n) = 0$ si $(x_1, ..., x_n) \in V(P_1, ..., P_m) \cap k^n$ et $S(x_1, ..., x_n) = 1$ si $(x_1, ..., x_n) \in k^n - V(P_1, ..., P_n)$.
11. Soit $Q \in k[X_1, ..., X_n]$ de degré total $\leq d$, avec $V(P_1, ..., P_m) \subset V(Q)$. Montrer qu'il existe $U_1, ..., U_m \in k[X_1, ..., X_n]$ de degré total $\leq md(q-1)$ tels que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in k^n$, on a $Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^m (P_i U_i)(x_1, ..., x_n)$.

II

Soit L_2 le groupe libre (non-abélien) sur deux générateurs α et β. Notons H le sous-groupe normal de G engendré par $\{\alpha^2, \beta^3\}$. Notons respectivement a et b les images de α et β dans $G = L_2/H$. (On dit que G un groupe de présentation $< a, b | a^2, b^3 >$.) Notons A le sous-groupe engendré par a et B le sous-groupe engendré par b. Soit R un anneau commutatif. On admettra qu'on a la suite exacte de G-modules (déduite des surjections canoniques $G \to G/A$ et $G \to G/B$)

$$0 \to R[G] \to R[G/A] \times R[G/B] \to R \to 0,$$

où l'application $R[G/A] \times R[G/B] \to R$ associe à (x, y) le degré de x - le degré de y. Pour $t \in \mathbf{Z}[G]$, on note $M[t] = \{m \in M / t.m = 0\}$.

1. Montrer que les R-modules ci-dessus sont libres.
2. Montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}_R(., M)$ donne lieu à une suite exacte de R-modules :

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R, M) \to \mathrm{Hom}_R(R[G/A], M) \times \mathrm{Hom}_R(R[G/B], M) \to \mathrm{Hom}_R(R[G], M) \to 0.$$

3. Soit H un sous-groupe de G. Identifier $\mathrm{Hom}_R(R[G/H], M)$ à $\mathrm{Hom}_{R[H]}(R[G], M)$.
4. En déduire une suite exacte de $R[G]$-modules

$$0 \to M \to \mathrm{Hom}_{R[A]}(R[G], M) \times \mathrm{Hom}_{R[B]}(R[G], M) \to \mathrm{Hom}_R(R[G], M) \to 0.$$

5. Montrer que, pour tout entier $i \geq 0$, $\mathrm{H}^i(G, \mathrm{Hom}_{R[H]}(R[G], M))$ s'identifie à $\mathrm{H}^i(H, M)$.
6. Montrer que $\mathrm{H}^i(G, \mathrm{Hom}_R(R[G], M))$ est isomorphe à M si $i = 0$.
7. Montrer que $\mathrm{H}^i(G, \mathrm{Hom}_R(R[G], M))$ est nul si $i > 0$.
8. Montrer que $\mathrm{H}^1(A, M)$ s'identifie à $M[1 + a]/(1 - a)M$ et que $\mathrm{H}^1(B, M)$ s'identifie à $M[1 + b + b^2]/(1 - b)M$.
9. Montrer qu'on a une suite exacte longue

$$0 \to M^G \to M^A \times M^B \to M \to \mathrm{H}^1(G, M) \to \frac{M[1 + a]}{(1 - a)M} \times \frac{M[1 + b + b^2]}{(1 - b)M} \to 0.$$

10. Montrer que, pour $i \geq 2$, $\mathrm{H}^i(G, M)$ s'identifie à $\mathrm{H}^i(A, M) \times \mathrm{H}^i(B, M)$.
11. Montrer que, pour $i \geq 2$, $\mathrm{H}^i(G, M)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^{i+2}(G, M)$.

Remarque : Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est isomorphe à G.