Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Algèbre
Année 2015-16

M. Livernet, L. Merel

EXAMEN du 22 Juin 2016

Durée : 3h

Tout appareil électronique est interdit. Document autorisé : une feuille manuscrite.

I

Soit G un groupe d'ordre 10.

1. Montrer que G admet un élément d'ordre 5. Notons-le ρ.
2. Montrer que G admet un unique 5-sous-groupe de Sylow, noté N.
3. Montrer que G admet un élément d'ordre 2. Notons le τ. Posons $T = \{1, \tau\}$.
4. Montrer que $G = \{\tau^i \rho^j, 0 \leq i \leq 1, 0 \leq j \leq 4\}$.
5. Supposons dans cette question que $\rho\tau = \tau\rho$. Montrer que G est cyclique d'ordre 10.
6. Supposons pour le reste de l'exercice que $\rho\tau \neq \tau\rho$. Montrer que la conjugaison par τ est un automorphisme de N. En déduire qu'on a un homomorphisme injectif de groupes $T \to \mathrm{Aut}(N)$ qui à t associe la conjugaison par t dans N.
7. Montrer qu'on a $\tau\rho^i\tau^{-1} = \rho^{-i}$ $(0 \leq i \leq 4)$. En déduire que G est un groupe diédral.
8. Montrer que G est isomorphe au sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_5$ engendré par la double transposition $(1,4)(2,3)$ et le 5-cycle $(1,2,3,4,5)$. Le groupe G est-il isomorphe à un sous-groupe du groupe alterné $\mathcal{A}_5$?
9. Tout groupe d'ordre 20 est-il cyclique ou diédral ? Tout groupe d'ordre 40 est-il abélien ou diédral ?
10. Tout groupe d'ordre 80 n'admet-il qu'un seul 5-sous-groupe de Sylow ?

II

Posons $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbf{C}/a, b \in \mathbf{Z}\}$ et $\mathbf{Q}[i] = \{a + ib \in \mathbf{C}/a, b \in \mathbf{Q}\}$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$. Est-ce un anneau intègre ?
2. Montrer que l'application $\mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}[i]$ qui à z associe $\bar{z}$ est un isomorphisme d'anneaux.
3. Posons, pour $z \in \mathbf{C}$, $N(z) = z\bar{z}$. Montrer qu'on a $N(zz') = N(z)N(z')$. En déduire que si $z \in \mathbf{Z}[i]^*$, on a $N(z) = 1$.
4. Montrer que l'ensemble $\mathbf{Z}[i]^*$ des éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i]$ est $\{1, -1, i, -i\}$.
5. Montrer que $\mathbf{Q}[i]$ est un corps. Donner sans justifier un isomorphisme d'anneaux entre $\mathbf{Q}[i]$ et le corps des fractions de $\mathbf{Z}[i]$.
6. Donner un polynôme irréductible sur $\mathbf{Q}$ qui est réductible sur $\mathbf{Q}[i]$.
7. Donner les racines dans $\mathbf{C}$ du polynôme $X^4 + 1$.
8. Montrer que le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
9. Est-il irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$?
10. Indiquer un élément non inversible et non nul de l'anneau quotient $\mathbf{Q}[i][X]/(X^4 + 1)$.