Université de Sciences et Technologie de Chine
Classe sino-française — Année 2021-22

EXAMEN du 22 mai 2022

Durée : 3h

Les deux parties sont indépendantes. Les notes de cours sont autorisées.

I

Soit n un entier ≥ 1. Soit K un corps. Posons $A = K[X_1, ..., X_n]$. Soit m un entier ≥ 1. On identifie $M_m(K)$ à K^{m^2} et on le munit de la topologie de Zariski.

Soient M, $N \in M_m(K)$. Pour $L \in M_m(K)$, on note P_L le polynôme caractéristique de L. On a $P_L(X) = \det(M - X\mathrm{Id})$, où Id est la matrice identité de $M_m(K)$.

On dit qu'un polynôme de $K[X]$ a des *facteurs multiples* s'il admet des zéros multiples dans une clôture algébrique de K.

Le but de cet exercice est de donner une nouvelle démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Il faut donc traiter les questions 4 et 8 directement, sans utiliser ce théorème.

1. Montrer que l'idéal (0) est premier dans A.
2. Supposons K algébriquement clos. Montrer que K^n est un ensemble algébrique affine irréductible.
3. Donner un exemple de corps K tel que K^n n'est pas un ensemble algébrique affine irréductible.
4. Montrer que si P_M n'a pas de facteur multiple, on a $P_M(M) = 0$.
5. Montrer que l'application déterminant $M_m(K) \to K$ est continue pour la topologie de Zariski.
6. Montrer que $Z = \{M \in M_m(K)/P_M(M) = 0\}$ est un ensemble algébrique affine de $M_m(K)$.
7. Montrer que Z est fermé dans $M_m(K)$ pour la topologie de Zariski.
8. Soit Y l'ensemble des éléments $L \in M_m(K)$ tels que P_L a des facteurs multiples. Montrer que Y est un ensemble algébrique fermé de $M_m(K)$.
9. En déduire que $P_M(M) = 0$.
10. Supposons N inversible. Montrer que $P_{MN} = P_{NM}$.
11. En déduire, par des arguments analogues que $P_{MN} = P_{NM}$.

II

Posons $A = \mathbf{Z}[X,Y]$. Posons $\epsilon : A \to \mathbf{Z}$ donné par $\epsilon(P(X,Y)) = P(1,1)$. Posons $B = \mathbf{Z}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$. Soit M un A-module. Soient G et H deux groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$ de générateurs g_0 et h_0 respectivement.

1. Montrer que l'application $A \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ qui à (P,n) associe $P(1,1)n$ fait de $\mathbf{Z}$ un A-module.

2. Pour P, Q, $R \in A$, posons $\alpha(P,Q) = (X-1)P(X,Y) + (Y-1)Q(X,Y) \in A$ et $\beta(R) = ((Y-1)R, -(X-1)R) \in A^2$. Montrer qu'on obtient ainsi une résolution projective de $\mathbf{Z}$ comme A-module

$$0 \to A \to A^2 \to A \to \mathbf{Z} \to 0.$$

3. Montrer que les groupes $\mathrm{Ext}^i_A(\mathbf{Z}, M)$ (dans la catégorie des A-modules) se déduisent de la cohomologie du complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A,M) \to \mathrm{Hom}_A(A \oplus A, M) \to \mathrm{Hom}_A(A,M) \to 0$$

où $\mathrm{Hom}_A(A,M) \to \mathrm{Hom}_A(A \oplus A, M)$ se déduit de α et $\mathrm{Hom}_A(A \oplus A, M) \to \mathrm{Hom}_A(A,M)$ se déduit de β.

4. En déduire que les groupes $\mathrm{Ext}^i_A(\mathbf{Z}, M)$ se déduisent de la cohomologie du complexe :

$$0 \to M \to M \oplus M \to M \to 0$$

où $d^0 : M \to M \oplus M$ est donné par $d^0(m) = ((X-1)m, (Y-1)m)$ et $d^1 : M \oplus M \to M$ est donné par $d^1(m \oplus n) = (X-1)m - (Y-1)n$.

5. Déterminer $\mathrm{Ext}^i_A(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ pour tout $i \geq 0$.

6. Montrer qu'on a une résolution projective de $\mathbf{Z}$ comme B-module

$$0 \to B \to B^2 \to B \to \mathbf{Z} \to 0.$$

7. Montrer que l'application $\mathbf{Z}$-linéaire $\mathbf{Z}[G \times H] \to \mathbf{Z}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$ qui, pour i, $j \in \mathbf{Z}$, à $[(g_0^i, h_0^j)]$ associe X^iY^j est un isomorphisme d'anneaux.

8. Montrer que tout $G \times H$-module est ainsi un A-module.

9. Supposons que M est un $G \times H$-module. Montrer que les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(G \times H, M)$ se déduisent de la cohomologie du complexe $C(M)$

$$0 \to M \to M \oplus M \to M \to 0.$$

10. Soit c un 1-cocycle $G \times H \to M$. Montrer que c est déterminé par $c(g_0)$ et $c(h_0)$.

11. Donner explicitement $\mathrm{Z}^1(G \times H, M) \to \mathrm{H}^1(C(M))$ qui produit l'isomorphisme $\mathrm{Z}^1(G \times H, M)/\mathrm{B}^1(G \times H, M) \to \mathrm{H}^1(G \times H, M)$.