Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques
P. Fima, L. Merel, A. Zuk

Calcul intégral
2016-2017

Examen de dattrapage , 21 juin 2017

Durée 3 heures

Document autorisé : une feuille manuscrite

1. Pour $t \geq 0$, on pose
$$I(t) = \int_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}} \frac{1}{x^2y^2 + x^2 + t} dxdy.$$
Calculer $I(t)$ à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{v^2 - t}$, $y = \frac{uv}{\sqrt{v^2-t}}$.

2. Pour f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on note
$$\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)|d\lambda(t) < \infty\},$$
où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $f * g$ la fonction $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)d\lambda(t) \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$
   (a) On suppose que f est bornée et g est intégrable.
      i. Montrer que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
      ii. Montrer que si f est continue alors $f * g$ est continue.
      iii. Montrer que si f est C^1 alors $f * g$ est C^1 et $(f * g)' = f' * g$.
   (b) On suppose f et g intégrables.
      i. Montrer que $f * g$ est définie presque partout (*indication : Fubini*).
      ii. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable et $Gr(f) := \{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de l'application f.
   (a) Le but de cette question est de montrer que $Gr(f)$ est mesurable.
      i. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y - x$ est mesurable.
      ii. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (f(x), y)$ est mesurable.
      iii. Conclure.
   (b) Le but de cette question est de montrer que $\lambda^2(Gr(f)) = 0$, où λ^2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
      i. Soit $N \in \mathbb{N}$. Calculer, à l'aide du Théorème de Fubini, l'intégrale $\int 1_{[-N,N]^2 \cap Gr(f)} d\lambda^2$.
      ii. Conclure.