Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques
P. Fima, L. Merel, A. Zuk

Calcul intégral
2016-2017

Examen du 13 janvier 2017
Durée 3 heures
Document autorisé : une feuille manuscrite

---

1. Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Pour $x \in X$, *l'atome de $\mathcal{A}$ engendré par x* est le sous-ensemble $\overline{x} \subset X$ définit par :
$$\overline{x} = \bigcap_{\{A\in\mathcal{A}\,:\,x\in A\}} A.$$
Soit $\mathcal{B} = \{\overline{x} \,:\, x \in X\}$ l'ensemble des atomes de $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que $X = \bigcup_{x\in X} \overline{x}$ et que $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$ pour tout $\overline{x} \neq \overline{y}$ (c'est-à-dire, $\mathcal{B}$ est une partition de X).
   (b) Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient tous ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
   (c) En déduire que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable, $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.
   (d) Montrer que si $\mathcal{B}$ est infini, $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ n'est pas dénombrable.
   (e) En déduire qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.
2. Pour $x,t \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,t) = \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$ et $F(t) = \int_0^1 f(x,t)dx$.
   (a) Justifier l'existence de $F(t)$ pour tout réel t.
   (b) Déterminer $F(0)$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
   (c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit $M > 0$ fixé. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [-M,M]$ on a
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq 2M.$$
   (e) En déduire que F est dérivable sur $[-M,M]$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier. Écrire la dérivée de F sous la forme d'une intégrale.
   (f) Étudier le signe de $F'(t)$ en fonction de t puis donner le tableau de variation ainsi que la représentation graphique de F.
   (g) Soit G la primitive de $(u \mapsto e^{-u^2})$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire la fonction définie pour tout réel t par $G(t) = \int_0^t e^{-u^2}du$.
      i. Montrer que $F'(t) = -2G(t)G'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
      ii. En déduire que $G^2(t) = \frac{\pi}{4} - F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

iii. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

3. Soit μ une mesure sur la tribu des boréliens. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $I + x = \{y \in \mathbb{R} : \exists z \in I,\ y = z + x\}$. On suppose que la mesure μ vérifie la propriété suivante : $\mu(I) = \mu(I + x)$ pour tout intervalle I et tout réel x et $\mu([0, 1]) = 1$.
   (a) Montrer que $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\})$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) En déduire que $\mu(\{x]) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mu([0, \frac{1}{n}]) = \frac{1}{n}$.
   (d) En déduire que μ est la mesure de Lebesgue.