Université Paris Cité — Année 2023-24
Licence de Mathématiques – Actions de groupes — L. Merel

EXAMEN du 12 janvier 2024

Durée : 3h. Une feuille manuscrite est autorisée.

I

Soit X un ensemble fini de cardinal > 1 muni d'une action transitive d'un groupe fini G. Pour $g \in G$, on note X^g l'ensemble des points fixes de X sous g. On note $G\backslash X$ l'ensemble des orbites de X sous G. On rappelle la formule de Burnside : $|G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$.

1. Que vaut $|G\backslash X|$?
2. Existe-t-il $g \in G$ tel que $|X^g| > 1$?
3. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $X^g = \emptyset$.
4. Donner un exemple où un tel élément g est unique.
5. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ opère (par homographies) transitivement sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.
6. Montrer que tout élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ a un point fixe pour cette action.

II

1. Quel est l'ordre du groupe symétrique $\mathcal{S}_6$?
2. Quel est l'ordre d'un 3-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_6$?
3. Donner un exemple de 3-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_6$.
4. Combien $\mathcal{S}_6$ a-t-il de 3-sous-groupes de Sylow ?
5. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant un unique 3-sous-groupe de Sylow ?
6. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant exactement 10 3-sous-groupes de Sylow ?
7. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant exactement 20 3-sous-groupes de Sylow ?
8. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant 40 3-sous-groupes de Sylow, 45 2-sous-groupes de Sylow et 36 5-sous-groupes de Sylow, tous cycliques ?

III

Soit P un cube dans $\mathbf{R}^3$. On rappelle que le groupe $G = \mathrm{Isom}^+(P)$ des isométries paires de P est constitué des éléments suivants : l'identité (type 1), les rotations d'ordre 2 dont l'axe passe par les milieux d'arêtes opposées (type 2), les rotations d'ordre 2 dont l'axe passe par les centres de faces opposées (type 2'), les rotations d'ordre 4 dont l'axe passe par les centres de faces opposées (type 4), les rotations d'ordre 3 dont l'axe passe par des sommets opposés (type 3). On rappelle que G agit sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des faces de P. On considère les *colorations* d'un cube, par trois couleurs : l'ensemble $\mathcal{C}$ des applications $\mathcal{F} \to \{r, v, b\}$.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{C}$?
2. Combien G contient-il d'éléments de chaque type ?
3. Montrer qu'on a une action du groupe G sur $\mathcal{C}$ donnée par $(g, F) \mapsto (f \mapsto F(g^{-1}.f))$.
4. Combien un élément de type 2 a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?
5. Combien un élément de type 2' a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?
6. Combien un élément de type 3 a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?
7. Combien un élément de type 4 a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?
8. En déduite le nombre d'orbites de $\mathcal{C}$ sous G.