Université Paris Cité | Année 2022-23
Licence de Mathématiques – Actions de groupes | L. Merel

EXAMEN du 11 janvier 2023

Durée : 3h. Une feuille manuscrite est autorisée. Les résultats de **II** *peuvent être utilisés dans* **III**. *La partie* **I** *est indépendante, il n'est pas nécessaire d'y justifier les réponses.*

I

Soit C un cube dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Soit D un dodécaèdre régulier de $\mathbf{R}^3$. Notons Γ et Δ les groupes d'isométries de C et D respectivement. Posons $Z = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\} \subset \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.

1. Combien C a-t-il de sommets, d'arêtes, de faces ?
2. Indiquer comment Γ s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{S}_6$.
3. Indiquer comment Δ/Z s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{S}_6$.

II

Soit K un sous-groupe normal de $\mathcal{S}_6$ contenu dans un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathcal{S}_6$.

1. Quel est l'ordre du groupe symétrique $\mathcal{S}_6$?
2. Quel est l'ordre d'un 5-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_6$?
3. Combien $\mathcal{S}_6$ a-t-il de 5-sous-groupes de Sylow ?
4. Montrer que K est d'ordre divisant 120.
5. Montrer que si K contient un 5-cycle, il contient tous les 5-cycles de $\mathcal{S}_6$.
6. Montrer que le nombre n_5 de 5-sous-groupes de Sylow de K est égal à 1 ou 6.
7. En déduire que K est d'ordre premier à 5.
8. Montrer que si K contient un produit de 3-cycles disjoints, K contient un 3-cycle.
9. Montrer que l'ordre de K est premier à 3.
10. Montrer que K est d'ordre impair. En déduire que K est trivial.

III

Soit $\mathbf{F}_5 = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ un corps à 5 éléments. Notons $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)$ l'ensemble des droites du plan vectoriel $\mathbf{F}_5^2$. On note $S = \{\lambda \mathrm{Id}/\lambda \in \mathbf{F}_5^\times\}$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5)$ le groupe quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)/S$.

1. Rappeler quels sont les 6 éléments de $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)$.
2. Rappeler comment $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$ agit transitivement sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)$.
3. Quel est l'ordre de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$?
4. Montrer que $S = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)/gx = x \text{ pour tout } x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)\}$.
5. En déduire qu'on a un morphisme injectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \to \mathcal{S}_6$. Notons H son image.
6. Montrer que H est d'indice 6 dans $\mathcal{S}_6$.
7. Montrer qu'on a une action de groupes de $\mathcal{S}_6$ sur $\mathcal{S}_6/H$ donnée par $(g, kH) \mapsto gkH$.
8. En déduire un morphisme de groupes $\phi : \mathcal{S}_6 \to \mathcal{S}_6$.
9. Montrer que le noyau de ϕ est contenu dans H.
10. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
11. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_6$. Montrer que le sous-groupe $\sigma H \sigma^{-1}$ n'opère pas transitivement sur $\mathcal{S}_6/H$.
12. Montrer que ϕ n'est pas donné par la conjugaison par σ (il n'est pas *intérieur*).