Université de Sciences et Technologie de Chine
Classe sino-française Année 2022-23

EXAMEN du 09 juin 2023

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées. Les parties sont indépendantes.

I

Soit A un anneau commutatif. Le *radical de Jacobson* $J(A)$ de A est l'intersection des idéaux maximaux de A. Notons $\sqrt{0}$ le nilradical de A. C'est l'ensemble des éléments nilpotents de A. Soit I un idéal de A.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (i) A possède exactement un idéal premier non nul.
   (ii) Tout élément de A est nilpotent ou inversible.
   (iii) $A/\sqrt{0}$ est un corps.
2. Montrer que $\sqrt{0} \subset J(A)$.
3. Montrer que, si $A = B[X]$, avec B anneau, on a $\sqrt{0} = J(A)$.
4. Montrer que $S = 1 + I$ est un ensemble multiplicatif.
5. Montrer que $S^{-1}I$ est contenu dans le radical de Jacobson de $S^{-1}A$.

II

Soit A un anneau commutatif. Soit $a \in A$. Soit $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$.

1. Montrer que P est inversible dans $A[X]$ si et seulement si a_0 est inversible dans A et a_1, ..., a_n sont nilpotents dans A.
2. Montrer que P est nilpotent dans $A[X]$ si et seulement si a_0, ..., a_n sont nilpotents dans A.
3. Montrer que P est un diviseur de 0 dans $A[X]$ si et seulement si il existe $a \in A$, $a \neq 0$, avec $aP = 0$.
4. On dit que P est *primitif* si et seulement si l'idéal $Aa_0 + ... + Aa_n$ est égal à A. Soient Q, $R \in A[X]$ tels que $P = QR$. Montrer que P est primitif si et seulement si Q et R sont primitifs.

III

Soit K un corps. Notons I l'idéal de $K[T_1, T_2, ..., T_n, ...]$ engendré par $\{T_i^i | i \geq 1\}$. Posons $A = K[T_1, T_2, ..., T_n, ...]/I$.

1. Montrer que A n'est pas un anneau noethérien.
2. Montrer que A possède un unique idéal premier.

IV

Soit K un corps algébriquement clos infini. Pour n entier ≥ 1, notons $\mathbf{P}^n$ l'espace projectif sur K. Soit $\phi : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$ donnée par $\phi(u,v) = (u^3, u^2v, uv^2, v^3)$. Notons C l'image de ϕ. Notons I l'idéal de $K[X,Y,Z,T]$ engendré par $(XT - ZY, Y^2 - XZ, Z^2 - YT)$.
1. Montrer que ϕ est bien défini.
2. Montrer que ϕ est un morphisme de variétés algébriques.
3. Montrer que $C = V(I)$.
4. Montrer que $I(C)$ est égal à I.
5. Montrer que $I(C)$ n'est pas un idéal engendré par 2 générateurs.

V

Soit L un groupe libre engendré par n éléments.
1. Montrer qu'on a un morphisme de $\mathbf{Z}[L]$-modules $d : \mathbf{Z}[L] \to \mathbf{Z}$ qui à $\sum_{l\in L} \lambda_l [l]$ associe $\sum_{l\in L} \lambda_l$.
2. Montrer que le noyau de d est un $\mathbf{Z}[L]$-module libre.
3. En déduire une résolution libre de $\mathbf{Z}$ comme $\mathbf{Z}[L]$-module.
4. Soit M un L-module muni de l'action triviale. En déduire $\mathrm{H}^n(L,M)$ et $\mathrm{H}_n(L,M)$ pour n entier ≥ 0.
5. Soit une suite exacte de groupes $0 \to M \to E \to L \to 0$. On dit que c'est une extension de L par M. On suppose que cette extension de L par M est centrale (c'est-à-dire que l'image de M est contenue dans le centre du groupe E). Montrer que c'est une extension équivalente à l'extension triviale.