Université Paris Diderot — Algèbre
Licence de Mathématiques — Année 2015-16
M. Livernet, L. Merel

EXAMEN du 8 Janvier 2016

Durée : 3h

Tout appareil électronique est interdit. Document autorisé : une feuille manuscrite.

I

1. Factoriser le nombre 2016 en produit de facteurs premiers.
2. Donner un exemple de groupe non abélien d'ordre 2016.
3. Soit G un groupe abélien d'ordre 2016. Montrer que G est isomorphe à un produit de trois groupes d'ordres respectifs 32, 9 et 7.
4. Le groupe G est-il nécessairement cyclique ?
5. Quel est l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})^\times$?
6. Lesquels des groupes suivants sont cycliques : $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^\times$, $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^\times$, $(\mathbf{Z}/32\mathbf{Z})^\times$? Indiquer un ensemble de générateurs dans chaque cas.
7. Montrer que le groupe $(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})^\times$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.
8. Le groupe $(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})^\times$ possède-t-il un élément d'ordre 24 ?
9. Soient n_1, n_2, ..., n_k des entiers. Posons $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. Montrer que le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ possède un sous-groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/n_2\mathbf{Z}) \times ... \times (\mathbf{Z}/n_k\mathbf{Z})$.
10. Montrer que le groupe $\mathcal{S}_{20}$ possède un sous-groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})^\times$.

II

Posons $\rho = (1+\sqrt{5})/2 \in \mathbf{R}$ et $A = \{u + v\rho \in \mathbf{R}/u, v \in \mathbf{Z}\}$. Soit $\mathrm{N} : A \to \mathbf{Z}$ donné par $\mathrm{N}(u + v\rho) = u^2 + uv - v^2$. Posons $K = \{a + b\rho \in \mathbf{R}/a, b \in \mathbf{Q}\}$.

1. Montrer que $\rho^2 \in A$.
2. Montrer que A et K sont des sous-anneaux de $\mathbf{R}$.
3. Montrer que $\phi : A \to A$ donné par $\phi(u + v\rho) = u + v - v\rho$ (pour $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$) est un isomorphisme d'anneaux.
4. Montrer que $\mathrm{N}(a) = a\phi(a)$. En déduire que N vérifie : $\mathrm{N}(aa') = \mathrm{N}(a)\mathrm{N}(a')$ (a, $a' \in A$).
5. Montrer que si $a \in A$ est inversible, on a $\mathrm{N}(a) \in \{-1, 1\}$.
6. Montrer que si $a \in A$ vérifie $\mathrm{N}(a) \in \{-1, 1\}$, on a $a \in A^\times$.
7. Montrer que $\rho \in A^\times$, puis que $\rho^n \in A^\times$ ($n \in \mathbf{Z}$).
8. Montrer que les seuls éléments d'ordre fini de $A^\times$ sont 1 et -1.
9. Montrer que le groupe $A^\times$ est infini.
10. Trouver $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire, irréductible sur $\mathbf{Q}$ tel que $P(\rho) = 0$.
11. Montrer que K est un corps, et qu'il est isomorphe au corps des fractions de A.
12. Montrer qu'on a un morphisme d'anneaux $\psi : \mathbf{Q}[X] \to K$ qui à P associe $P(\rho)$.
13. Montrer que ψ est surjectif de noyau l'idéal engendré par $X^2 - X - 1$.