Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Calcul intégral
Année 2016-17

P. Fima, L. Merel, A. Zuk

EXAMEN du 5 novembre 2016

Durée : 2h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits.

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et 1_A la fonction caractéristique de $A \subset \mathbf{R}$.

I

Soit $\alpha \in [0,1]$. Considérons $f_\alpha : \mathbf{R} \to [0,+\infty]$ définie par $f_\alpha(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{1-x} 1_{[0,\alpha]}(x)$.
1. Montrer que f_α est borélienne pour tout $\alpha \in [0,1]$.
2. Écrire, en justifiant tout les détails, l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} f_\alpha d\lambda$ sous forme d'une somme de série à termes positifs.
3. En déduire les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est λ-intégrable.

II

Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, notons δ_α la mesure de Dirac concentrée en α. Posons $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\delta_{1/n}$ et $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n}\delta_{1/n}$.
1. Montrer que ce sont des mesures sur l'espace mesurable $\mathbf{R}$ muni de la tribu borélienne.
2. Calculer $\mu(\mathbf{R})$ et $\nu(\mathbf{R})$.
3. Pour k entier ≥ 1. Calculer $\int_{[0,1/k]} d\mu$ et $\int_{[0,1/k]} d\nu$.
4. Calculer les limites quand k tend vers l'infini de ces quantités.
5. Sont-elles égales à $\mu(\{0\})$ et $\nu(\{0\})$ respectivement ?

III

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Pour n un entier ≥ 1, on pose $B_n = \cap_{k\geq n} A_k$ et $C_n = \cup_{k\geq n} A_k$. On pose enfin $\overline{\lim}(A_n) = \cap_{n\geq 1} C_n$ et $\underline{\lim}(A_n) = \cup_{n\geq 0} B_n$.
1. Montrer que les suites $(B_n)_{n\geq 1}$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ sont croissante et décroissante respectivement.
2. Montrer que $\mu(\underline{\lim}(A_n)) \leq \liminf(\mu(A_n))$.
3. Supposons que $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) < \infty$. Montrer que $\mu(\overline{\lim}(A_n)) \geq \limsup(\mu(A_n))$.
4. Supposons que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu(\overline{\lim}(A_n)) = 0$.
5. Soit ϵ un nombre réel > 0. Pour q nombre entier ≥ 1, posons dans $\mathbf{R}$

$$A_q = [0,1] \cap \cup_{p=0}^{q} [p/q - 1/q^{2+\epsilon}, p/q + 1/q^{2+\epsilon}].$$

Montrer que $\lambda(A_q) \leq 2/q^{1+\epsilon}$.
6. En déduire que $\sum_{q=1}^{\infty} \lambda(A_q) < \infty$.
7. En déduire que pour presque tout $x \in [0,1]$ l'ensemble $\{p/q \in \mathbf{Q} / |x - p/q| < 1/q^{2+\epsilon}\}$ est fini (ici p et q sont entiers, positifs et premiers entre eux).