Université de Paris
Master de Mathématiques

Théorie algébrique des nombres I
Année 2021-22
H. Chen, P. Molin, L. Merel

EXAMEN du 3 novembre 2021 – Durée : 3h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

Notations et rappels

Soit N un nombre premier impair. Soit ζ une racine primitive N-ème de l'unité dans $\mathbf{C}$. On rappelle que le polynôme $\Phi_N = 1 + X + ... + X^{N-1}$, comme tous les polynômes cyclotomiques, est irréductible sur $\mathbf{Q}$. On rappelle que l'extension $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$ est abélienne (*i.e.* galoisienne de groupe de Galois abélien). Le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q})$ s'identifie à $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ (l'image réciproque de $i \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ est l'automorphisme σ_i de $\mathbf{Q}(\zeta)$ qui à ζ associe ζ^i).

On admettra que $\mathbf{Z}[\zeta]$ est l'anneau des entiers $\mathbf{Q}(\zeta)$.

On pose $X_N = \mathrm{Hom}((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times, \mathbf{C}^\times)$. Pour $\chi \in X_N$ et $n \in \mathbf{Z}$, on pose, si $n \in N\mathbf{Z}$, $\chi(n) = 0$ et, si $n \notin N\mathbf{Z}$, $\chi(n) = \chi(n + N\mathbf{Z})$. Si $\chi \neq 1$, on considère la série de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n^s.$$

Notons $G(\chi) = \sum_{j=1}^{N-1} \chi(j)\zeta^j$ la somme de Gauss. On note Z_K la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombre K. On pose $L(1, s) = Z_{\mathbf{Q}}(s)$ (fonction zêta de Riemann). Notons h_N le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\zeta)$ et R_N son régulateur. La notation log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbf{C}$.

I

1. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$?
2. Montrer que le discriminant absolu de $\mathbf{Z}[\zeta]$ est N^{N-2}.
3. Soit p un nombre premier, $p \neq N$. Montrer que $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$ est non ramifiée en p.
4. Montrer que toute substitution de Frobenius en p dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q})$ s'identifie à σ_p.
5. Quel est le nombre r (resp. s) de plongements réels (resp. complexes non réels à conjugaison près) de $\mathbf{Q}(\zeta)$?
6. Montrer que la norme (pour l'extension $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$) de $1 - \zeta$ est N.
7. En déduire que $1 - \zeta$ engendre un idéal maximal de $\mathbf{Z}[\zeta]$.
8. Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de $\mathbf{Z}[\zeta]$ au dessus de N. Montrer que sa classe dans le groupe des classes de $\mathbf{Q}(\zeta)$ est nulle.
9. Quel est le rang du groupe $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$?
10. Montrer que le sous-groupe de torsion de $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$ est cyclique et engendré par $-\zeta$.
11. Pour $i \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$, posons $u_i = (1 - \zeta^i)/(1 - \zeta)$. Montrer que $u_i \in \mathbf{Z}[\zeta]^\times$.
12. Montrer que u_i/u_{-i} est une racine de l'unité.

II

1. Si $\chi \neq 1$, montrer qu'on a

$$L(\chi, s) = \prod_{p \neq N} 1/(1 - \chi(p)p^{-s}),$$

où p parcourt les nombres premiers différents de N.
2. Supposons que $\chi \neq 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la série $L(\chi, s)$ converge pour $\Re(s) > 1 - \epsilon$.
3. Montrer qu'on a

$$Z_{\mathbf{Q}(\zeta)}(s) = \prod_{\chi \in \chi_N} L(\chi, s).$$

4. En déduire que, si $\chi \neq 1$, on a $L(\chi, 1) \neq 0$.
5. Montrer que

$$\prod_{\chi \in X_N, \chi \neq 1} L(\chi, 1) = (2\pi)^{(N-1)/2} h_N R_N / (2N^{N/2}).$$

6. Si $\chi \neq 1$, montrer que

$$L(\chi, 1) = (-G(\chi)/N) \sum_{a=1}^{N-1} \bar{\chi}(a) \log(1 - \zeta^{-a}).$$

7. Si $\chi(-1) = -1$, monter que

$$L(\chi, 1) = (\pi i G(\chi)/N) \sum_{a=1}^{N-1} \bar{\chi}(a)(a/N - 1/2).$$

8. Si $\chi(-1) = -1$, montrer qu'on a $\sum_{a=1}^{N-1} \chi(a)a \neq 0$.
9. Si $\chi(-1) = 1$, $\chi \neq 1$, montrer que

$$L(\chi, 1) = (-2G(\chi)/N) \sum_{a=1}^{(N-1)/2} \bar{\chi}(a) \log|1 - \zeta^{-a}|.$$

10. Soit G un groupe abélien fini. Posons $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times)$. Soit M un $\mathbf{Z}[G]$-module. Soit $m \in M$. Supposons que pour tout $\chi \in \hat{G}$, on a, dans $M \otimes \mathbf{C}$, $\sum_{\tau \in G} \tau(m) \otimes \chi(\tau) \neq 0$. Montrer que les $(\tau(m))_{\tau \in \hat{G}}$ engendrent un groupe de rang égal à l'ordre de G.
11. Montrer que $(1 - \zeta^i)_{1 \leq i \leq (N-1)/2}$ engendre un groupe de rang $(N-1)/2$ dans $\mathbf{Q}(\zeta)^\times$.
12. En déduire que le sous-groupe engendré par $\{u_i, i \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times\}$ est d'indice fini dans $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$.