Université de Sciences et Technologie de Chine
Classe sino-française Année 2022-23

CORRIGÉ de l'EXAMEN du 15 mai 2023

I

Soit A un anneau intègre. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. L'anneau A_a est l'anneau de fraction de A par le sous-ensemble multiplicatif $\{a^n | n \in \mathbf{N}\}$. On note F le corps des fractions de A.

On dit que A est un *anneau de Goldman* s'il existe $a \in A$ tel que A_a est un corps.

1. Montrer que si A est un anneau de Goldman, on a $A_a = F$.

Comme A est intègre, on a $A_a \subset F$. Comme tout corps contenant A est une extension de F, on a bien $A_a = F$.

2. Montrer que A est de Goldman si et seulement si F est une algèbre de type fini sur A (il existe x_1,..., $x_n \in F$ tels que $F = A[x_1, ..., x_n]$).

Si A est de Goldman, on a $F = A[1/a]$. Réciproquement, si $F = A[x_1, ..., x_n]$, on pose $x_i = p_i/q_i$ avec p_i, $q_i \in A$. On a alors $F = A[1/q_1, ..., 1/q_n] = A[1/(q_1...q_n)] = A_{(q_1 \cdots q_n)}$.

3. Supposons que A est un anneau de polynômes, *i.e.* $A = B[X]$, avec B anneau commutatif. Montrer que A n'est pas un anneau de Goldman.

Dans un anneau de polynômes, il y a une infinité d'éléments irréductibles (argument d'Euclide). Si A est un anneau de Goldman, on a $F = A[x_1, ..., x_n]$, avec x_1,..., $x_n \in F$. Posons $x_i = p_i/q_i$ avec p_i, $q_i \in A$. Soit q un élément irréductible qui ne divise pas $q_1...q_n$. On a $1/q \notin A[x_1, ..., x_n]$. Donc $A[x_1, ..., x_n]$ n'est pas un corps, ce qui est absurde.

4. Soit L un corps. Soit K un sous-corps de L. Soient $x \in L$ et $y \in K[x]$ tels que $K[x]_y = L$. Montrer que $L = K[x]$.

Si $K[x]_y = L$, $K[x]$ est un anneau de Goldman. Si x est transcendant sur K, on a $K[x]$ est isomorphe à $K[X]$, qui est un anneau de Goldman. Mais, $K[X]$ n'est pas un anneau de Goldman. Donc x est algébrique sur K, et $K[x]$ est un corps. On a alors $K[x] = K[x]_y = L$.

5. Supposons qu'il existe un anneau intègre A' et $a' \in A'$ tels que $A' = A[a']$. Notons F' le corps des fractions de A'. Supposons que A' est un anneau de Goldman. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que A_a est un corps, et F' est une extension finie de A_a.

Comme A' est un anneau de Goldman, il existe $b \in A'$ tel que $A'_b = F'$. Comme A' est un anneau de Goldman, a' est algébrique sur F. Comme $b \in F[a']$, b est algébrique sur F. Comme F est le corps des fractions de A, il existe $P \in A[X]$ tel que $P(b) = 0$. Posons $P(X) = -a + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$. On a donc $a = bc$ avec $c = a_2b + ... + a_nb^{n-1} \in A'$. Soit $x \in F$. Comme $F \subset F' = A'_b$, posons $x = x'/b^k$, avec $k \in \mathbf{N}$ et $x' \in A'$. On a donc $x = x'c^k/(bc)^k = x'c^k/a^k$. Comme $x \in A$ et $a \in A$, on a $x \in A_a$. Donc $F = A_a$.

6. Soit L un corps qui contient A comme sous-anneau, et tel que $L = A[x_1, ..., x_n]$, avec $x_1, ..., x_n \in L$. Montrer que A est un anneau de Goldman et que L est une extension finie de F. (C'est le *théorème de Zariski–Goldman–Krull.*)

On procède par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que l'assertion est vraie pour n générateurs et montrons l'assertion pour $n+1$ générateurs x_1, ..., x_{n+1}. Posons $A' = A[x_{n+1}]$ et notons F' le corps des fractions de A'. On a $L = A'[x_1, , , .x_n]$. Par hypothèse de récurrence, A' est un anneau de Goldman et L est une extension finie de F'. Utilisons la question précédente. Il existe $a \in A$ tel que $A_a = F$, et A est un anneau de Goldman et l'extension $F'|F$ est finie. Donc les extensions $L|F'$ et $F'|F$ sont finies, si bien que $L|F$ est finie.

II

Soit $G = \{1, c\}$ un groupe a deux éléments. On dit qu'un G-module M est *acyclique* si pour tout m, $m' \in M$ tel que $c.m = m$ et $c.m' = -m'$, il existe n, $n' \in M$ tel que $m = (1+c).n$ et $m' = (1-c).n'$. On note $M[2] = \{m \in M | 2.m = 0\}$. Pour $i \in \mathbf{Z}$, on note $\hat{H}^i(G, M)$ le i-ème groupe de cohomologie modifié de Tate.

1. Montrer que M est acyclique si et seulement si $\hat{H}^i(G, M) = 0$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Comme G est cyclique, il suffit de le montrer pour $i = 0$ et $i = 1$. Or $\hat{H}^0(G, M) = 0$ revient à dire que $(1+c)M = \{m \in M | c.m = m\}$. De même $\hat{H}^1(G, M) = 0$ revient à dire que $(1-c)M = \{m \in M | c.m = -m\}$.

2. Montrer que tout G-module libre est acyclique.

On vérifie directement que $\mathbf{Z}[G]$ est un module acyclique, car les invariants de $\mathbf{Z}[G]$ sont exactement $(1+c)\mathbf{Z}[G]$. Si M est un G-module libre. Il admet une base comme $\mathbf{Z}[G]$-module. On vérifie que M est acyclique sur chaque coordonnée.

3. Tout module acyclique est-il libre ?

Non, par exemple, $\mathbf{Q}$ muni de l'action triviale de G est acyclique. Mais il n'est pas libre comme G-module. s

4. Tout module acyclique est-il projectif ?

Non, $\mathbf{Q}$ n'est pas projectif comme $\mathbf{Z}$-module et donc pas projectif comme $\mathbf{Z}[G]$-module.

5. Tout module projectif est-il acyclique ?

Un module projectif M est un facteur direct d'un module libre L. On a donc $L = M \oplus N$, avec N sous-G-module de L. On a donc des morphismes de G-modules $M \to L \to M$, dont la composée est l'identité. On a donc un morphisme de groupes dont la composée est l'identité $\hat{H}^i(G, M) \to \hat{H}^i(G, L) \to \hat{H}^i(G, M)$. Donc $\hat{H}^i(G, M) = 0$, puisque $\hat{H}^i(G, L) = 0$, car L est libre. Donc M est acyclique.

6. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de G-modules. Montrer que si M et M' (resp. M et M'', resp. M' et M'') sont acycliques, alors M'' (resp. M', resp. M) est acyclique.

On écrit la suite exacte longue (qui est un hexagone) :

$$\to \hat{H}^1(G, M'') \to \hat{H}^0(G, M') \to \hat{H}^0(G, M) \to \hat{H}^0(G, M'') \to \hat{H}^1(G, M') \to \hat{H}^1(G, M) \to$$

Si deux parmi M, M', M'' sont acycliques la suite est nulle, et le troisième est acyclique.

7. Supposons que M est un $\mathbf{Z}$-module libre. Montrer que $\hat{H}^{i+1}(G, M) = \hat{H}^i(G, M/2M)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

C'est FAUX. Considérons $\mathbf{Z}$ vu comme G-module trivial. Il est libre comme $\mathbf{Z}$-module. On a $\hat{H}^1(G, \mathbf{Z}) = 0$ et $\hat{H}^0(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

8. Supposons que $2.M = 0$. Montrer qu'on a $\hat{H}^0(G, M) = \hat{H}^1(G, M)$.

Si $2M = 0$, pour $m \in M/2M$, on a $m = -m$ et donc $\hat{H}^0(G, M/2M) = \hat{H}^1(G, M/2M)$.

9. Supposons que M est un $\mathbf{Z}$-module libre. Montrer que M est acyclique si et seulement si $\hat{H}^0(G, M) = 0$.

C'est FAUX. Considérons $\mathbf{Z}$ muni de l'action de G donnée par $c.m = -m$. On a $\hat{H}^1(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\hat{H}^0(G, \mathbf{Z}) = 0$.

10. Montrer que si M est de type fini, son quotient de Herbrand est égal à 1.

C'est FAUX. Voir les contre-exemples des questions 7. et 9.

11. Montrer que si $M = 2M$, M est acyclique.

On vérfie directement que $\hat{H}^i(G, M) = 0$.

12. Supposons que G opère sur un ensemble X. Cela fait de $\mathbf{Z}[X]$ un G-module. Montrer que $\mathbf{Z}[X]$ est acyclique si et seulement si c n'a pas de point fixe dans X.

Si X est sans point fixe, soit S un système de représentants de X/G. Alors $\{[s] | s \in S\}$ est une base de $\mathbf{Z}[X]$ comme $\mathbf{Z}[G]$-module. Alors $\mathbf{Z}[X]$ est un module libre et donc acyclique. Si X admet un point fixe x_0, on a $c.x_0 = x_0$. Montrons que $\hat{H}^0(G, \mathbf{Z}[X])$ est non nul. Soit $m = \sum_{x \in X} \lambda_x [x]$ tel que $(1 + c).m = x_0$. Cela entraîne $2\lambda_{x_0} = 1$, ce qui est absurde.

III

Soit K un corps. Soit n entier ≥ 0. On note $\mathbf{P}^n(K)$ l'espace projectif de dimension n sur K. Soit $f \in K[X_0, X_1, ..., X_n]$, non nul, homogène de degré > 0. On note $D^+(f) = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbf{P}^n(K) | f(x_0, x_1, ..., x_n) \neq 0\}$. Considérons l'application $\phi : \mathbf{P}^2(K) \to \mathbf{P}^5(K)$ qui à (X_0, X_1, X_2) associe $(X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2)$.

On note $\theta : K[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5] \to K[X_0, X_1, X_2]$ donnée par $\theta(P)(X_0, X_1, X_2) = P(X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2)$. On note I le noyau de θ.

1. Montrer que ϕ est bien défini.

Soit $\lambda \in K^\times$. Dans $\mathbf{P}^5(K)$, on a

$$((\lambda X_0)^2, (\lambda X_1)^2, (\lambda X_2)^2, (\lambda X_0)(\lambda X_1), (\lambda X_0)(\lambda X_2), (\lambda X_1)(\lambda X_2)) =$$

$$= \lambda^2(X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2) = (X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2).$$

Donc ϕ est bien défini, car $\lambda^2 \in K^\times$.

2. Montrer que ϕ est un morphisme de variétés algébriques.

Il suffit de recouvrir $\mathbf{P}^2(K)$ par les ouverts affines $D^+(X_0)$, $D^+(X_1)$ et $D^+(X_2)$, puis de montrer que $\phi_{|D^+(X_i)}$ est un morphisme. Pour $i \in \{0,1,2\}$, on a en fait $\phi_{|D^+(X_i)} : D^+(X_i) \to D^+(Z_i)$, qui sont des ouverts affines, où ϕ provient du morphisme d'anneaux θ. Cela montre que ϕ est un morphisme de variétés algébriques.

3. Montrer que $\{Z_0Z_1 - Z_3^2, Z_0Z_2 - Z_4^2, Z_1Z_2 - Z_5^2, Z_0Z_5 - Z_3Z_4, Z_1Z_4 - Z_3Z_5, Z_2Z_3 - Z_4Z_5\}$ est un système de générateurs de I.

Notons J l'idéal engendré par ces générateurs. Il est contenu dans I. Montrons que $I = J$. Soit $P \in I$. On peut écrire $P(Z_0, Z_1, Z_2) = F(Z_0, Z_1, Z_2) + Z_3F_3(Z_0, Z_1, Z_2) + Z_4F_4(Z_0, Z_1, Z_2) + Z_5F_5(Z_0, Z_1, Z_2) + G$, avec F, F_3, F_4, $F_5 \in K[Z_0, Z_1, Z_2]$ et $G \in J$. Comme $P \in I$, on a $F(X_0^2, X_1^2, X_2^2) + X_0X_1F_3(X_0^2, X_1^2, X_2^2) + X_0X_2F_4(X_0^2, X_1^2, X_2^2) + X_1X_2F_5(X_0^2, X_1^2, X_2^2) = 0$. En considérant les termes qui sont de degré impair en X_0 et X_1, on trouve que $F_3 = 0$. De même, on trouve que $F_4 = F_5 = 0$. Finalement, on trouve $F = 0$, et donc $P \in J$.

4. Montrer que I est un idéal homogène. On note $V = V_p(I)$ la variété projective associée (c'est la *surface de Veronese*).

L'idéal I est homogène, car il est engendré par des éléments homogènes de degré 2.

5. Montrer que ϕ est une bijection entre les ensembles $\mathbf{P}^2(K)$ et V.

L'image de ϕ est égale à V. Montrons que ϕ est injective. Soient $(x_0, x_1, x_2) \in K^3$ et $(y_0, y_1, y_2) \in K^3$ non nuls. Supposons que $\phi(x_0, x_1, x_2) = \phi(y_0, y_1, y_2)$. Il existe $\lambda \in K^\times$ tels que $\lambda x_0^2 = y_0^2$, $\lambda x_1^2 = y_1^2$, $\lambda x_2^2 = y_2^2$, $\lambda x_0x_1 = y_0y_1$, $\lambda x_0x_2 = y_0y_2$, $\lambda x_1x_2 = y_1y_2$. On en déduit que $x_iy_j = x_jy_i$, et donc que $(x_0, x_1, x_2) = (y_0, y_1, y_2)$ dans $\mathbf{P}^2(K)$. Donc ϕ est injective.

6. Montrer que $V \subset D^+(Z_0) \cup D^+(Z_1) \cup D^+(Z_2)$.

Soit $P = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in V$, avec $P \notin D^+(Z_0) \cup D^+(Z_1) \cup D^+(Z_2)$. On a $z_0 = z_1 = z_2 = 0$. Comme $P \in V$, on a $z_3^2 = 0$ et donc $z_3 = 0$. De même $z_4 = 0$ et $z_4 = 0$, ce qui est absurde.

7. Pour $i \in \{0,1,2\}$, trouver un morphisme $\psi : D^+(Z_i) \cap V \to D^+(X_i)$ réciproque de ϕ.

Pour $i = 0$, on pose $\psi(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (z_0, z_3, z_4)$. En effet, $\phi(z_0, z_3, z_4) = (z_0^2, z_3^2, z_4^2, z_0z_3, z_0z_4, z_3z_4)$. On a $z_3^2 = z_0z_1$, $z_4^2 = z_0z_2$, et $z_3z_4 = z_0z_5$. On a donc $\phi(z_0, z_3, z_4) = z_0(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$. On a $\phi(z_0, z_3, z_4) = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, puisque $z_0 \neq 0$.

On procède de même pour $i = 1$ et $i = 2$.

8. En déduire que ϕ définit un isomorphisme de variétés algébriques entre $\mathbf{P}^2(K)$ et V.

D'après les deux questions précédentes, il existe un morphisme $\psi : V \to \mathbf{P}^2(K)$ qui est réciproque de ϕ. Donc ϕ est bien un isomorphisme de variétés algébriques.

9. Soit $F \in K[X_0, X_1, X_2]$ un polynôme homogène non nul de degré 2. Montrer que $\phi(D^+(F)) = V \cap D^+(H)$, où $H \in K[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5]$ est homogène de degré 1.

Posons $F = a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_0X_1 + a_4X_0X_2 + a_5X_1X_2$. On pose $H = a_0Z_0 + a_1Z_1 + a_2Z_2 + a_3Z_3 + a_4Z_4 + a_5Z_5$. On a bien que $\phi(D^+(F)) = V \cap D^+(H)$.

10. Montrer que $D^+(H)$ est un ouvert affine de $\mathbf{P}^5(K)$.

X_0 et H sont des formes linéaires sur K^6. Il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_6(K)$ tel que $MX_0 = H$. Elle agit sur $\mathbf{P}^5(K)$. C'est un automorphisme de $\mathbf{P}^5(K)$. Donc $D^+(H)$ est isomorphe à $D^+(X_0)$ qui est un ouvert affine.

11. En déduire que $D^+(F)$ est un ouvert affine de $\mathbf{P}^2(K)$.

D'après les questions précédentes, $D^+(F)$ est isomorphe à $V \cap D^+(H)$, qui est un fermé de l'ouvert affine $D^+(H)$, et donc une variété affine.

12. Peut-on généraliser cet argument pour montrer que $D^+(f)$ est un ouvert affine de $\mathbf{P}^n(K)$ pour tout $f \in K[X_0, X_1, ..., X_n]$ homogène de degré > 0 ?

Voir le livre de Daniel Perrin, *Géométrie algébrique, une introduction* p. 88 pour une élaboration de cette généralisation par le *morphisme de Veronese*.