Université Paris Cité — Année 2023-24

Licence de Mathématiques – Actions de groupes — L. Merel

CORRIGÉ de l'EXAMEN du 12 janvier 2024

I

1. Que vaut $|G\backslash X|$?

   Comme l'action est transitive, il n'y a qu'une orbite. On a $|G\backslash X| = 1$.

2. Existe-t-il $g \in G$ tel que $|X^g| > 1$?

   Pour g élément neutre, on a $X^g = X$, qui a plus d'un élément par hypothèse.

3. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $X^g = \emptyset$.

   Utilisons la formule de Burnside. On a $1 = |G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \frac{|X|}{|G|} + \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G, g\neq 1}|X^g|$. Si $X^g \neq \emptyset$ pour tout $g \in G$, chaque terme de la deuxième partie de l'égalité est $\geq 1/|G|$, et on a $\frac{|X|}{|G|} > 1/|G|$ par hypothèse. Donc $\frac{|X|}{|G|} + \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G, g\neq 1}|X^g| > 1$, ce qui est absurde. (Cet énoncé est un autre théorème de Burnside.)

4. Donner un exemple où un tel élément g est unique.

   Considérons l'action d'un groupe à deux éléments sur lui-même par translation.

5. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ opère (par homographies) transitivement sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

   Notons u/v la classe de (u, v) dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On note ∞ la classe de $(1, 0)$. Soit $u/v \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Il existe $g = \begin{pmatrix} u & w \\ v & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$. On a $g\infty = u/v$. Donc l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ est transitive.

6. Montrer que tout élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ a un point fixe pour cette action.

   Soit $g = \begin{pmatrix} u & w \\ v & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$. Si $v = 0$, ∞ est point fixe de g. Sinon, montrons qu'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $g.z = z$, c'est-à-dire $(uz + w)/(vz + t) = z$. Cela revient à dire que $uz + w = vz^2 + tz$. Comme $v \neq 0$, il s'agit d'une équation du second degré, qui a toujours une solution dans $\mathbf{C}$. (On montré que le théorème de Burnside est faux pour l'action transitive d'un groupe sur un ensemble infini.)

II

1. Quel est l'ordre du groupe symétrique $\mathcal{S}_6$?

   C'est $6! = 720$.

2. Quel est l'ordre d'un 3-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_6$?

   On a $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Un 3-sous-groupe de Sylow est d'ordre $3^2 = 9$.

3. Donner un exemple de 3-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_6$.

   Le groupe engendré par les 3-cycles $(1\,2\,3)$ et $(4\,5\,6)$.

4. Combien $\mathcal{S}_6$ a-t-il de 3-sous-groupes de Sylow ?

   Les 3-sous-groupes de Sylow sont conjugués. Ils sont donc tous engendrés par deux 3-cycles à supports disjoints c_1 et c_2. Un groupe ainsi engendré ne dépend que des supports S_1 et S_2 de c_1 et c_2. Alors S_2 est nécessairement le supplémentaire de S_1. Il y a $6!/(3!3!) = 20$ façons de choisir S_1. Mais le Sylow dépend de la paire $\{S_1, S_2\}$. Le nombre de façons de choisir cette paire est donc $20/2 = 10$. Il y a 10 3-sous-groupes de Sylow.

5. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant un unique 3-sous-groupe de Sylow ?

Oui, $\mathbf{Z}/720\mathbf{Z}$. Les sous-groupes de Sylow des groupes abéliens sont uniques.

6. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant exactement 10 3-sous-groupes de Sylow ?

Oui, $\mathcal{S}_6$, comme on vient de le voir.

7. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant exactement 20 3-sous-groupes de Sylow ?

Non, car le nombre de 3-sous-groupes de Sylow est congru à 1 modulo 3.

8. Existe-t-il un groupe d'ordre 720 possédant 40 3-sous-groupes de Sylow, 45 2-sous-groupes de Sylow et 36 5-sous-groupes de Sylow, tous cycliques ?

Ces nombres satisfont aux critères numériques exigés par les théorèmes de Sylow. Supposons qu'un tel groupe G existe. Deux sous-groupes de Sylow distincts ne peuvent avoir des générateurs en commun. Il y a 4 (resp. 6, resp. 8) générateurs d'un 5(resp. 3, resp. 2)-sous-groupe de Sylow cyclique d'ordre 5 (resp. 9, resp. 16). On a donc $36 \times 4 + 40 \times 6 + 45 \times 8 = 748$ éléments distincts dans G. C'est absurde, car $748 > 720$.

III

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{C}$?

Comme il y a 6 faces sur un cube. On a $\mathcal{C} = 3^6$.

2. Combien G contient-il d'éléments de chaque type ?

Il y a un élément de type 1. Comme il y a 6 paires d'arêtes opposées, on a 6 rotations de type 2. Il y a 3 paires de faces opposées, et donc 3 rotations de type 2'. Pour chaque paire de faces opposées, il y a deux rotations d'ordre 4. Ainsi on a 6 rotations de type 4. Il y a 4 paires de sommets opposés. Pour chaque telle paire, il y a deux rotations d'ordre 3. Ainsi, on a 8 rotations de type 3. Au total, G possède 24 éléments.

3. Montrer qu'on a une action du groupe G sur $\mathcal{C}$ donnée par $(g, F) \mapsto (f \mapsto F(g^{-1}.f))$.

Soient $F \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{F}$, et g, $h \in \mathcal{F}$. On a $1.F = F$ et $((gh).F)(f) = F((gh)^{-1}.f)) = F(h^{-1}g^{-1}.f) = (g.(h.F))(f)$.

4. Combien un élément de type 2 a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?

Un élément de type 2 agit sur les faces avec trois orbites (trois paires de faces). Un point fixe de $\mathcal{C}$ est une coloration pour laquelle les couleurs sont constantes sur ces orbites. Comme il y a trois orbites, on a 3^3 points fixes.

5. Combien un élément de type 2' a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?

Un élément de type 2' agit sur les faces avec quatre orbites (deux faces opposées qui intersectent l'axe, et deux paires de faces opposées). On a 3^4 points fixes.

6. Combien un élément de type 3 a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?

Un élément de type 3 agit sur les faces avec deux orbites (les deux groupes de faces adjacents à l'un et l'autre des sommets de l'axe). Il y a 3^2 points fixes.

7. Combien un élément de type 4 a-t-il de points fixes dans $\mathcal{C}$?

Un élément de type 4 agit sur les faces avec trois orbites (les deux faces opposées qui intersectent l'axe et le reste des quatre faces). Il y a 3^3 points fixes.

8. En déduite le nombre d'orbites de $\mathcal{C}$ sous G.

Utilisons la formule de Burnside. Le nombre d'orbite est $(\sum_{g\in G} |\mathcal{C}^g|)/|G|$. Compte-tenu de ce qui précède, on trouve : $(3^6 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 8 \times 3^2 + 6 \times 3^3)/24 = 3^2(81 + 18 + 27 + 8 + 18)/24 = 3 \times 152/8 = 57$. Il y a 57 façons de colorier un cube avec trois couleurs, à rotation du cube près.