Université Paris Cité — Année 2022-23
Licence de Mathématiques – Actions de groupes — L. Merel

CORRIGÉ de l'EXAMEN du 11 janvier 2023

Durée : 3h. Appareils et documents sont interdits. Les résultats de **II** *peuvent être utilisés dans* **III**. *La partie* **I** *est indépendante, il n'est pas nécessaire d'y justifier les réponses.*

I

Soit C un cube dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Soit D un dodécaèdre régulier de $\mathbf{R}^3$. Notons Γ et Δ les groupes d'isométries de C et D respectivement. Posons $Z = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\} \subset \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.

1. Combien C a-t-il de sommets, d'arêtes, de faces ? / Il y a 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces.
2. Indiquer comment Γ s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{S}_6$. / Le cube possède 6 faces. L'action d'une isométrie du cube préserve les faces si bien que Γ opère sur 6 éléments. Cette action est fidèle puisqu'une isométrie qui laisse fixe toutes les faces est l'identité.
3. Indiquer comment Δ/Z s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{S}_6$. / Le dodécaèdre possède 12 faces, et 6 paires de faces opposées. Le groupe Δ préserve les paires de faces opposées et opère donc sur 6 éléments. Le sous-groupe de Δ qui laisse fixes toutes les paires de faces opposées est Z. Ainsi, l'action de Δ se factorise par Δ/Z, qui agit fidèlement.

II

Soit K un sous-groupe normal de $\mathcal{S}_6$ contenu dans un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathcal{S}_6$.

1. Quel est l'ordre du groupe symétrique $\mathcal{S}_6$? / C'est $6! = 720$.
2. Quel est l'ordre d'un 5-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_6$? / Comme $720 = 5 \times 144$, c'est 5.
3. Combien $\mathcal{S}_6$ a-t-il de 5-sous-groupes de Sylow ? / Ce nombre divise 144 et est congru à 1 modulo 5. Les diviseurs de 144 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 et 144. Seuls 1, 6, 16 et 36 sont congus à 1 modulo 5. Ces 5-Sylow sont d'ordre 5 et sont donc cycliques et engendrés par des 5-cycles. On peut les dénombrer : il y a 6 supports possibles pour le 5-cycle générateur. Un support donné supporte $4! = 24$ 5-cycles. Cela donne 24×6 générateurs possibles. Chaque groupe cyclique d'ordre 5 contient 4 générateurs. Il y a donc $144/4 = 36$ groupes d'ordre 5, et donc 36 5-Sylow.
4. Montrer que K est d'ordre divisant 120. / On a $|K|$ divise $|H| = 720/6 = 120$.
5. Montrer que si K contient un 5-cycle, il contient tous les 5-cycles de $\mathcal{S}_6$. / Tous les 5-cycles de $\mathcal{S}_6$ sont conjugués. Comme K est normal dans $\mathcal{S}_6$, il contient les conjugués de tous ses éléments, et donc de tous les 5-cycles s'il contient un 5-cycle.
6. Montrer que le nombre n_5 de 5-sous-groupes de Sylow de K est égal à 1 ou 6. / Comme l'ordre de K divise 120, n_5 divise 24 et est congru à 1 modulo 5. Donc $n_5 = 1$ ou 6.
7. En déduire que K est d'ordre premier à 5. / Si 5 divise l'ordre de K, par le théorème de Cauchy, K contient un élément d'ordre 5, et donc un 5-cycle et donc tous les 5-cycles. Il y en a 36. Cela contredit le fait que K possède au plus 6 5-Sylow.
8. Montrer que si K contient un produit de 3-cycles disjoints, K contient un 3-cycle. / Soit $(abc)(def)$ une telle permutation. Posons $\tau = (ef)$ dans $\mathcal{S}_6$. On a $\tau\sigma_3\tau^{-1} = (abc)(dfe) \in K$, car K est normal dans $\mathcal{S}_6$, et donc $(abc)(def)(abc)(dfe) = (acb) \in K$.

9. Montrer que l'ordre de K est premier à 3. / Si K est d'ordre divisible par 3, il possède un élément d'ordre 3, *i.e.* un produit de 3-cycles disjoints. Il contient alors un 3-cycle d'après ce qui précède. Le groupe K est normal dans $\mathcal{S}_6$. S'il contient un 3-cycle, il contient donc tous les conjugués de ce 3-cycle, et donc tous les 3-cycles. Or il y a $6!/3!^2 = 20$ supports possibles pour un 3-cycle, et donc $20 \times 2 = 40$ 3-cycles. C'est absurde car $|K| \leq 24$.
10. Montrer que K est d'ordre impair. En déduire que K est trivial. / Si $|K|$ est pair, il contient un élément d'ordre 2, *i.e.* un produit de (une, deux ou trois) transpositions disjointes. Il y a $6!/(4!2!) = 15$ transpositions, $6!/(4!2!) \times 4!/(2!2!)/2 = 45$ double transpositions et $5 \times 3 \times 1 = 15$ triple transpositions dans $\mathcal{S}_6$. Dans chaque cas, cela donne davantage que 8 éléments, ce qui est absurde. Donc $|K|$ est impair ; c'est 1.

III

Soit $\mathbf{F}_5 = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ un corps à 5 éléments. Notons $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)$ l'ensemble des droites du plan vectoriel $\mathbf{F}_5^2$. On note $S = \{\lambda \mathrm{Id}/\lambda \in \mathbf{F}_5^\times\}$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5)$ le groupe quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)/S$.

1. Rappeler quels sont les 6 éléments de $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)$. / Ce sont les droites engendrées par les vecteurs $(u, 1)$, pour $u \in \mathbf{F}_5$, et $(1, 0)$.
2. Rappeler comment $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$ agit transitivement sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)$. / Notons $\mathbf{F}_5(u, v)$ la droite de vecteur directeur (u, v). L'action associe est donnée par $(g, \mathbf{F}_5(u, v)) \mapsto \mathbf{F}_5 g(u, v)$.
3. Quel est l'ordre de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$? / C'est $(5^2 - 5)(5^2 - 1) = 480$.
4. Montrer que $S = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)/gx = x$ pour tout $x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)\}$. / Tout élément de S est une homothétie non nulle, et laisse fixe toute droite. Réciproquement, soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$ laissant fixe toute droite. On a $g(1, 0) = (a, c)$ et $g(0, 1) = (b, d)$. Alors $\mathbf{F}_p(a, c) = \mathbf{F}_p(1, 0)$ et donc $c = 0$. De même, on a $b = 0$. On a de plus $g(1, 1) = (a + b, c + d) = (a, d)$. Donc (a, d) est colinéaire à $(1, 1)$, donc $a = d$. Donc $g \in S$.
5. En déduire qu'on a un morphisme injectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \to \mathcal{S}_6$. Notons H son image. / D'après 4., S est le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5) \to \mathcal{S}(\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5))$, d'où un morphisme injectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \to \mathcal{S}(\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5))$. Ce dernier est isomophe à $\mathcal{S}_6$, puisque $|\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_5)| = 6$.
6. Montrer que H est d'indice 6 dans $\mathcal{S}_6$. / Le morphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \to \mathcal{S}_6$ est injectif puisque le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5) \to \mathcal{S}_6$ est égal à S. Son image a pour ordre $|\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5)| = |\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)|/|S| = 480/4 = 120$. Donc H est d'indice $720/120 = 6$ dans $\mathcal{S}_6$.
7. Montrer qu'on a une action de groupes de $\mathcal{S}_6$ sur $\mathcal{S}_6/H$ donnée par $(g, kH) \mapsto gkH$. / C'est l'action par translation à gauche. On a bien $1kH = H$ et $g(g'kH) = (gg')kH$.
8. En déduire un morphisme de groupes $\phi : \mathcal{S}_6 \to \mathcal{S}_6$. / Puisque H est d'indice 6 dans $\mathcal{S}_6$, l'ensemble $\mathcal{S}_6/H$ est de cardinal 6. On a donc bien un morphisme de groupes $\mathcal{S}_6 \to \mathcal{S}_6$.
9. Montrer que le noyau de ϕ est contenu dans H. / Le noyau de ϕ est formé par les $g \in \mathcal{S}_6$ tels que $gkH = kH$ pour tout k dans $\mathcal{S}_6$, en particulier on a $gH = H$, et donc $g \in H$.
10. Montrer que ϕ est un isomorphisme. / Le noyau de ϕ est un sous-groupe normal K de $\mathcal{S}_6$ contenu dans H. D'après **II**, K est trivial. Donc ϕ est injectif, et donc bijectif.
11. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_6$. Montrer que le sous-groupe $\sigma H \sigma^{-1}$ n'opère pas transitivement sur $\mathcal{S}_6/H$. / L'orbite de σH est $\sigma H \sigma^{-1} \sigma H = \{\sigma H\} \neq \mathcal{S}_6/H$. L'action n'est pas transitive.
12. Montrer que ϕ n'est pas donné par la conjugaison par σ (il n'est pas *intérieur*). / Supposons que $\phi(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$. On a alors que $\phi(H) = \sigma H \sigma^{-1}$. Ainsi $\phi(H)$ n'opère pas transitivement sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mais H opère transitivement. C'est absurde.