Université de Paris
Master de Mathématiques

Topologie algébrique
Année 2021-22

CONTRÔLE du 22 février 2022 – Durée : 1h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits.

1. Rappeler comment $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ s'identifie à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

2. Soit $y_0 \in \mathbf{S}^1$. Notons X l'image de l'application $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ qui à x associe (x, y_0). Montrer que $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 - X$ est connexe.

3. Montrer que tout lacet de $\mathbf{R}^2$ est homotope à un lacet constant.

4. Montrer que $\mathbf{R}^2$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^2$ privée d'un point.

5. Soit X un espace topologique. Soit γ un lacet de X homotope au lacet constant. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que $f \circ \gamma$ est homotope au lacet constant.

6. Montrer qu'il existel un lacet non-homotope à un lacet constant sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ privé d'un point ?

7. Les espaces $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ privé d'un point et $\mathbf{S}^2$ privée d'un point sont-ils homotopiquement équivalents ?

8. Les espaces $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et $\mathbf{S}^2$ sont-ils homéomorphes ?

9. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ opère transitivement sur la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$.

10. On identifie le groupe $\mathrm{O}(n-1)$ à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ par l'application $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$. Établir un homéomorphisme $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \to \mathbf{S}^{n-1}$.