Université Paris Cité
Master de Mathématiques

Topologie algébrique
Année 2022-23

CONTRÔLE du 21 février 2023 – Durée : 1h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits.

1. La projection sur la première coordonnée $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle fermée ?
2. Donner un exemple d'espaces topologiques X et Y non homéomorphes mais homotopiquement équivalents.
3. Donner un exemple d'espaces topologiques X et Y, d'application continue injective $f : X \to Y$, de lacet $\gamma : [0,1] \to X$ avec γ non homotope à un lacet constant et $f \circ \gamma$ homotope à un lacet constant.
4. Les espaces topologiques $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}$ sont-ils homéomorphes ?
5. Les espaces topologiques $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ sont-ils homéomorphes ?
6. L'espace topologique discret $\mathbf{Z}$ est-il un espace cellulaire ?
7. L'équateur E de la sphère $\mathbf{S}^2$ est-il un retract par déformation de $\mathbf{S}^2$ sur E ?
8. La sphère $\mathbf{S}^2$ privée de ses pôles N et S est-elle homotopiquement équivalente à $\mathbf{S}^1$?
9. On identifie le groupe $\mathrm{O}(n-1)$ à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ par l'application $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$. Établir un homéomorphisme $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \to \mathbf{S}^{n-1}$.
10. Donner un exemple d'espace topologique X pour lequel, pour tout $x \in X$, il n'existe aucun voisinage de x simplement connexe.