Université Paris Cité
Master de Mathématiques

Topologie algébrique
Année 2022-23

CONTRÔLE du 8 février 2023 – Durée : 1h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits.

1. Les parties $[a, +\infty[$, $a \in \mathbf{R}$, $\emptyset$ et $\mathbf{R}$ constituent-elles une topologie de $\mathbf{R}$?
2. Donner un exemple de fonction continue $X \to Y$ avec Y compact et X non compact.
3. Trouver un sous-ensemble A de $\mathbf{R}$ d'intérieur vide et dont l'ensemble des points d'accumulation dans $\mathbf{R}$ est $\mathbf{R}$.
4. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, muni de la topologie dont les ouverts sont : $\emptyset$ $\{x_1\}$, $\{x_2, x_3\}$, X. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dont les classes sont $\{x_1, x_2\}$ et $\{x_3\}$. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. La surjection canonique $X \to X/\mathcal{R}$ est-elle ouverte ?
5. Le sous-ensemble $\mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}^2$ de $\mathbf{R}^2$ est-il connexe ?
6. Indiquer un homéomorphisme de $\mathbf{R}^2$ vers la boule ouverte de dimension 2.
7. La projection sur la première coordonnée $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle fermée ?
8. Indiquer une application continue surjective $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.
9. Soit S un sous-ensemble fini de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) - S$ est connexe.
10. Soit X un espace topologique séparé. Soit K_1 et K_2 deux compacts disjoints de X. Montrer que ces parties sont séparées dans X (*i.e.* il existe deux ouverts U_1 et U_2 de X tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $K_1 \subset U_1$ et $K_2 \subset U_2$).