CONTRÔLE du 8 février 2022 – Durée : 1h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits.

Soit X un espace topologique. L'espace X est dit T_0 (ou *Kolmogorov*) si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$ il existe un voisinage V de x tel que $y \notin V$ ou un voisinage V de y tel que $x \notin V$. Il est dit T_1 (ou *Fréchet*) si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$, il existe un voisinage V de x tel que $y \notin V$. Il est dit T_2 (ou *Hausdorff*, ou *séparé*) si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$, il existe des voisinages U et V de x et y respectivement avec $U \cap V = \emptyset$.

On considère $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète, et $X = \mathbf{R} \times \{0,1\}$ muni de la topologie produit. On munit X de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$ et $\{(x,0),(x,1)\}$, pour $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient.

1. Donner une base de voisinages de $(0,0)$ dans $X/\mathcal{R}$.
2. La topologie de $X/\mathcal{R}$ est-elle T_0 ?
3. La topologie de $X/\mathcal{R}$ est-elle T_1 ?
4. La topologie de $X/\mathcal{R}$ est-elle T_2 ?
5. Rappeler la définition de $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ comme quotient du cercle $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$.
6. Montrer que l'application $z \mapsto z^2$ dans $\mathbf{C}$ permet d'identifier $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ au cercle $\mathbf{S}^1$.
7. L'espace $X/\mathcal{R}$ est-il connexe ?
8. Est-il connexe si on le prive d'un point ?
9. Est-il homéomorphe à $\mathbf{RP}^1$?
10. Est-il homéomorphe à $\mathbf{R}^2$?