L3 Mathématiques et Mathématiques/Enseignement **Université Paris Diderot**
2015/2016

Algèbre

Partiel du 18 novembre 2015

Durée: 3 heures

Une feuille A4 recto-verso autorisée. Tout autre document et calculatrice interdits. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère les sous-groupes suivants de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}, \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que H n'est pas abélien.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & T \\ u & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
est un isomorphisme de groupes.
3. Montrer que T est distingué dans H mais n'est pas distingué dans $GL_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que le quotient H/T est un groupe abélien.

Exercice 2. On se fixe p un nombre entier premier, n un nombre entier non nul et A un ensemble à n éléments. L'ensemble A^p est l'ensemble des p-uplets de A; un élément de cet ensemble sera noté $(a_1, \ldots, , a_p)$.

On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \Sigma_p \times A^p & \to & A^p \\ & (\sigma, (a_1, \ldots, a_p)) & \mapsto & (a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(p)}). \end{array}$$

1. Montrer que φ définit une action à gauche du groupe des permutations Σ_p sur l'ensemble A^p.
2. On restreint l'action φ au sous-groupe K de Σ_p engendré par le cycle $(12 \ldots p)$.
   (a) Quel est l'ordre de K?
   (b) Montrer que l'ensemble des points fixes pour l'action de K sur A^p est le sous-ensemble de A^p constitué des éléments de la forme $(\underbrace{a, \ldots, a}_{p \text{ fois}})$ pour $a \in A$.
   (c) En vous aidant de la formule des classes, déduire de la question précédente que n^p est congru à n modulo p.

T.S.V.P

Exercice 3. Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$ on considère l'application $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f_{(\alpha,\beta)}(z) = \alpha z + \beta$.

1. Montrer que l'application $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une bijection.

2. Montrer que $F = \{f_{\alpha,\beta} | (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$ est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$.

3. Montrer que la composée $\underbrace{f_{\alpha,\beta} \circ \ldots \circ f_{\alpha,\beta}}_{n \text{ fois}}$ vaut $f_{\alpha^n,(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i)\beta}$.

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le couple (α, β) pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit d'ordre fini.

Exercice 4. Dans tout l'exercice on se fixe p un nombre premier.

On rappelle qu'un p-groupe G est un groupe d'ordre une puissance de p. On rappelle que le centre de G est noté $Z(G)$ et est défini par $Z(G) = \{x \in G, \forall g \in G, xg = gx\}$. Enfin, on utilisera les résultats suivants que l'on ne demande pas de re-démontrer:

P1. *Si $G/Z(G)$ est cyclique alors G est abélien.*

P2. *Si G est un p-groupe alors p divise l'ordre de $Z(G)$, en particulier $Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre.*

P3. *Tout groupe d'ordre p est cyclique.*

1. Soit G un groupe d'ordre p^2. En vous aidant des résultats $P1$, $P2$ et $P3$ montrer que $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$ et montrer que G est abélien.

2. Dans cette question on suppose que G est un groupe d'ordre p^3, non abélien.

   (a) Donner un exemple d'un groupe non abélien d'ordre 8.

   (b) Montrer que $Z(G)$ est d'ordre p.

   (c) Déduire de la question 1. que $G/Z(G)$ est abélien.

   (d) Le sous-groupe dérivé de G, noté $D(G)$, est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs, c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$. Montrer que si H est un sous-groupe distingué de G tel que G/H est abélien alors $D(G) \subset H$.

   (e) Montrer que $D(G) \subset Z(G)$, puis que $D(G) = Z(G)$.