Feuille 5 — Groupe fondamental

1. Indiquer des espaces topologiques X, Y et $f : X \to Y$ continue, injective (resp. surjective) et telle que f ne produise pas un homomorphisme injectif (resp. surjectif) f_* entre les groupes fondamentaux de X et Y.

2.a. Soit X un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ étoilé autour d'un point. Montrer que X est simplement connexe. En déduire qu'un espace vectoriel réel est simplement connexe. La réunion de deux espaces d'intersection non-vide, chacun étoilé autour d'un point, est-elle toujours simplement connexe ?
2.b. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ privé d'un ensemble étoilé autour d'un point. Montrer que $\mathbf{R}^n - E$ est simplement connexe. En déduire qu'un plan privé d'une demi-droite est simplement connexe.

3.a. Identifions $\mathbf{S}^1$ à $\{z \in \mathbf{C}/|z| = 1\}$. Rappeler comment est définie l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin. Montrer que $c \mapsto e(c) = \int_c \frac{dz}{2i\pi z} \in \mathbf{Z}$ définit un morphisme de groupes surjectif $\pi_1(\mathbf{S}^1, x_0) \to \mathbf{Z}$, indépendant du choix du point base x_0. Montrer que $e(c) = 0$ lorsque c est contractile.
3.b Posons $c(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$, avec $\theta : [0,1] \to \mathbf{R}$, continue. Montrer que $e(c) = \theta(1) - \theta(0)$. En déduire que θ, et donc c, est contractile lorsque $e(c) = 0$.
3.c. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $\pi_1(\mathbf{S}^1, x_0) \to \mathbf{Z}$.
3.d. En déduire que le groupe fondamental du plan privé d'un point est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Soit c un lacet de $\mathbf{C}$. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ en dehors du support de c. L'*indice de c par rapport à z_0* est par définition $\mathrm{Ind}_{z_0}(c) = \int_c \frac{dz}{2i\pi(z-z_0)} \in \mathbf{Z}$. Montrer que cet indice est nul en dehors d'un ensemble borné.
3.e. Soit $ABCD$ un carré du plan. Notons V son enveloppe convexe (*i.e.* son intérieur). Existe-t-il un chemin f d'origine A et d'extrémité C dans $\mathbf{C} - V$ et un chemin g d'origine B et d'extrémité D, tels que $f(]0,1[) \subset \mathbf{C} - V$, et $g(]0,1[) \subset \mathbf{C} - V$, tels que les images de f et g soient disjointes ? On pourra compléter f pour en faire un lacet F, et considérer l'indice de F par rapport à $g(t)$ lorsque t varie.

4. Soit G un groupe topologique dont l'élément neutre est noté e et . désigne la loi de groupe.
4.a. Soient α et β deux lacets de G d'origine e. Montrer que $\alpha.\beta$ est un lacet de G, puis que les lacets $(\alpha * \gamma_e).(\gamma_e * \beta)$ et $(\gamma_e * \alpha).(\beta * \gamma_e)$, où γ_e est le chemin constant égal à e, sont homotopes.
4.b. Montrer que le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est un groupe abélien.

5. Soit X un espace topologique. Soit m un entier ≥ 1. On pose $F(X, m) = \{(x_1, ..., x_m) \in X^m / x_i \neq x_j, (i \neq j)\}$ muni de la topologie induite par $\mathbf{R}^m$. C'est l'*espace des configurations de m points dans X*. Pour n entier ≥ 1, on plonge $\mathbf{S}^{n-1}$ dans $F(\mathbf{R}^n, 2)$ par $y \mapsto (0, y)$.
5.a. Montrer que $F(\mathbf{S}^1, 2)$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. En déduire le groupe fondamental de $F(\mathbf{S}^1, 2)$.
5.b. Montrer que $\mathbf{S}^{n-1}$ est un rétract par déformation de $F(\mathbf{R}^n, 2)$. Déterminer $\pi_1(F(\mathbf{R}^n, 2), 0)$.

6. Soit n un entier ≥ 1. Considérons le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt $g : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{O}(n)$.
6.a. Montrer que g est continue et qu'elle définit une équivalence d'homotopie.
6.b. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{O}(2)$ et leurs groupes fondamentaux, puis $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}), 1)$.

7. Soit X un espace topologique. Soit $F : X \times I \to X$ une homotopie telle que, pour tout $x \in X$, on a $F(x, 0) = F(x, 1) = x$. Pour $x_0 \in X$, on considère le lacet $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(t) = F(x_0, t)$. Montrer que la classe de γ appartient au centre du groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$.

8. Soit X un espace topologique. Considérons les trois conditions : *(i)* Toute application continue $\mathbf{S}^1 \to X$ est homotope à une application constante, *(ii)* Toute application continue $\mathbf{S}^1 \to X$ se prolonge en une application continue $\mathbf{B}^2 \to X$, (*iii*) le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est trivial pour tout $x_0 \in X$. Montrer que ces trois conditions sont équivalentes. En déduire que X est simplement connexe si et seulement si toutes les applications continues $\mathbf{S}^1 \to X$ sont homotopiquement équivalentes.

9. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soient A et B deux parties de X telles que $X = A \cup B$. Supposons A et B simplement connexes, et $A \cap B$ connexe par arcs et non vide. Si A et B sont ouverts, montrer que $A \cup B$ est simplement connexe. Donner un exemple où $A \cup B$ n'est pas simplement connexe.

10. On se propose de montrer le *théorème du point fixe de Brouwer* (en dimension 2) : toute application continue $f : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{B}^2$ admet un point fixe. Supposons que ce ne soit pas le cas.

10.a. Considérer deux feuilles identiques. Froisser l'une de ces feuilles, sans la déchirer, et la poser sur l'autre feuille sans qu'elle dépasse. Vérifier qu'un point de la première feuille est encore au-dessus de son correspondant de la deuxième feuille. Idem une nappe sur une table, un drap sur un lit etc.
10.b. Soit ϕ une application continue $\mathbf{B}^2 \to \mathbf{S}^1$, qui est l'identité sur $\mathbf{S}^1$ (*i.e.* une *rétraction* de $\mathbf{B}^2$ sur $\mathbf{S}^1$). Montrer que l'application $H : [0,1]^2 \to \mathbf{S}^1$ telle que $H(x,t) = \phi(xe^{2i\pi t})$ est une homotopie d'un lacet constant à un lacet qui fait un tour du cercle. En déduire que ϕ n'existe pas.
10.c. Pour $x \in \mathbf{B}^2$, soit $g(x) \in \mathbf{S}^1$ l'unique point tel que les vecteurs $\overrightarrow{xf(x)}$ et $\overrightarrow{g(x)x}$ ont mêmes sens et direction. Montrer que l'application g est continue. En déduire le théorème de Brouwer en dimension 2.
10.d. Est-il encore valide si on remplace le disque unité par une boule ouverte, un rectangle fermé, une ellipse fermée, un fermé étoilé autour d'un point, un compact étoilé autour d'un point, par une sphère de dimension 2, par le plan projectif, par la surface d'un tore, par une couronne du plan ?
10.e. Soit n un entier ≥ 1. Admettons qu'il n'y a pas de rétraction par déformation de $\mathbf{B}^n$ sur sa frontière $\mathbf{S}^{n-1}$. Démontrer que toute application continue de la boule unité fermée de dimension n dans elle-même admet un point fixe. En déduire que toute application continue $K \to K$ admet un point fixe, lorsque K est un compact convexe de $\mathbf{R}^n$ (ou, plus généralement, un compact étoilé autour d'un point).

11. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. Supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$.
11.a. Montrer qu'il existe $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ continue telle que $f(z)^n = P(z)$, et $f(z)/z \to 1$ lorsque $z \to \infty$.
11.b. Posons $g(z) = z - f(z)/2$. Montrer que pour R nombre réel assez grand, la fonction g laisse stable la boule ouverte $B(0,R)$ de centre 0 et de rayon R. Appliquer le théorème de Brouwer.
11.c. En déduire que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine.

12. Soit f une application continue $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$. On se propose de montrer qu'il existe $a \in \mathbf{S}^2$ tel que $f(a) = f(-a)$ (*Théorème de Borsuk-Ulam* en dimension 2). Supposons que a n'existe pas.
12.a. Soit f_1 une application continue $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{S}^1$ tel que $f_1(a) = f_1(-a)$.
12.b. En déduire que si $\mathbf{S}^1$ est réunion de deux fermés, l'un de ces fermés contient deux points antipodaux.
12.c. Considérons $g : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^1$, donnée par $g(t) = (f(t) - f(-t))/|f(t) - f(-t)|$. Considérons le lacet $\alpha : s \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0)$, qui fait le tour de l'équateur de $\mathbf{S}^2$. On a un lacet composé $\beta = g \circ \alpha : [0,1] \to \mathbf{S}^1$. Montrer que α est contractile dans $\mathbf{S}^2$. En déduire que β est contractile.
12.d. Montrer qu'on a $\beta(s) = -\beta(s + 1/2)$ ($s \in [0, 1/2]$). Identifions $\mathbf{S}^1$ à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et relevons le lacet β en un chemin $\tilde{\beta} : [0,1] \to \mathbf{R}$. Montrer qu'on a $\tilde{\beta}(s + 1/2) = \tilde{\beta}(s) + m$ avec $m \in 1/2 + \mathbf{Z}$ indépendant de s.
12.e. En déduire que la classe de β dans $\pi_1(\mathbf{S}^1) \simeq \mathbf{Z}$ est égale à $2m$ au signe près.
12.f. En déduire que β n'est pas contractile.
12.g. Montrer qu'il existe deux points antipodaux sur Terre où température et vitesse du vent coïncident.

13. Soient F_1, F_2 et F_3 trois fermés de $\mathbf{S}^2$, et dont la réunion est $\mathbf{S}^2$. La distance d de $\mathbf{R}^3$ induit une distance sur $\mathbf{S}^2$. Pour $i \in \{1,2,3\}$ et $x \in \mathbf{S}^2$, posons $\delta_i(x) = \min_{y \in F_i} d(x,y)$. C'est la *distance* de x à F_i.
13.a. Montrer que, pour $i \in \{1,2,3\}$, la fonctions δ_i est continue et que $\delta_i(x) = 0$ si et seulement si $x \in F_i$.
13.b. Montrer qu'il existe $x \in \mathbf{S}^2$ tel que $\delta_1(x) = \delta_1(-x)$ et $\delta_2(x) = \delta_2(-x)$.
13.c. En déduire que F_1, F_2 ou F_3 contient deux points antipodaux.
13.d. Existe-t-il quatre fermés de $\mathbf{S}^2$, dont la réunion est $\mathbf{S}^2$, tels qu'aucun d'entre eux ne contiennent de paire de points antipodaux ? (Inscrire $\mathbf{S}^2$ dans un tétraèdre régulier.)
13.e. Montrer que le soleil ne se couche jamais sur le territoire de l'un au moins des trois états qui se partagent la Terre dans le roman *1984* de G. Orwell.

14. Considérons trois ensembles compact mesurables E_1, E_2 et E_3 dans $\mathbf{R}^3$. On se propose de montrer qu'il existe un plan affine de $\mathbf{R}^3$ qui coupe chacun des trois solides en deux parties égales (c'est le *théorème du sandwich*, dit parfois *théorème du sandwich au jambon*). On dit qu'un plan P *coupe* E_i *en deux parties égales* si les intersections de E_i avec chacune des deux composantes connexes de $\mathbf{R}^3 - P$ ont même mesure.
14.a. Considérons la sphère unité $\mathbf{S}^2$ centrée en l'origine O de $\mathbf{R}^3$. Soit M un point de $\mathbf{S}^2$. Notons $\overrightarrow{P_M}$ le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ orthogonal à $\overrightarrow{OM}$. Montrer qu'il existe un plan affine P_M de direction $\overrightarrow{P_M}$ qui coupe E_3 en deux parties égales. Notons P_M^+ le demi-espace de bord P_M vers lequel pointe $\overrightarrow{OM}$.
14.b. Considérons la fonction f_i qui à M associe la mesure de $P_M^+ \cap E_i$ ($i \in \{1,2\}$). Montrer qu'on a $f_i(M) = f_i(-M)$ si et seulement si P_M coupe E_i en deux parties égales.
14.c. En considérant la fonction $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$ qui à M associe $(f_1(M), f_2(M))$, montrer qu'il existe M tel que P_M coupe E_1, E_2 et E_3 en deux parties égales.