Université Paris Cité Année 2022-23
M1 mathématiques – Topologie algébrique L. Merel

Feuille 4 — Homotopie, rétraction par déformation

1.a. Montrer que le cercle est homotopiquement équivalent au plan privé d'un point. Est-il homéomorphe au plan privé d'un point ?
1.b. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que $\mathbf{S}^n$ est homotopiquement équivalente à $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$.
1.c. Soient N, $S \in \mathbf{S}^n$ (les *pôles*) avec $N \neq S$. Montrer que $\mathbf{S}^{n-1}$ est homotopiquement équivalent à $\mathbf{S}^n - \{N, S\}$.

2. Considérons quotient de l'ensemble $\mathbf{R} \times [-1, 1]$ par la relation d'équivalence définie par : $(x, y) \sim (x', y')$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $(x', y') = (x + k, (-1)^k y)$. On le munit de la topologie quotient. C'est le *ruban de Moebius*. Montrer qu'il est homotopiquement équivalent au cercle.

3. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que $\mathbf{S}^n$ privée d'un point est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$.

4.a. Notons X le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ formé de la réunion des cercles C_0 et C_1 de centres 0 et 1 respectivement et de rayon 1/2. Montrer que $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ se rétracte par déformation sur X.
4.b. Montrer que $\{0\} \times \mathbf{S}^1$ est un rétract par déformation de $\mathbf{C}^2 - \Delta = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 / z_1 \neq z_2\}$ par déformation dans $\mathbf{C}^2$.
4.c. Notons D le sous-ensemble de $\mathbf{C}^3$ formé par les triplets de coordonnées deux-à-deux distinctes. Montrer que l'ensemble $\{(0, u, uv) \in \mathbf{C}^3 / u \in \mathbf{S}^1, v \in X\}$ est un rétract par déformation de D dans $\mathbf{C}^3$.

5. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ est homotopiquement équivalent à $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ privé d'un point.

6.a. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que la classe pour l'équivalence d'homotopie d'un plan réel privé de n-points deux-à-deux distincts ne dépend pas des points choisis.
6.b. Montrer que $\mathbf{R}^3$ privé de n droites deux-à-deux disjointes est homotopiquement équivalent à un plan privé de n points.

7. Soient X et Y deux espaces topologiques ayant le même type d'homotopie. Montrer que X est connexe par arcs si et seulement si Y est connexe par arcs.

8. Pour $z \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{C}(z, 1)$ le cercle de centre z et de rayon 1. Posons $X = \mathcal{C}(1, 1) \cup \mathcal{C}(-1, 1)$, $Y = \mathcal{C}(2, 1) \cup \mathcal{C}(-2, 1) \cup [-1, 1]$ et $Z = \mathcal{C}(0, 1) \cup [-i, i]$. Montrer explicitement que X, Y et Z sont homotopiquement équivalents.

9. Soient m et n des entiers ≥ 0, avec $m < n$. On plonge $\mathbf{S}^m$ dans $\mathbf{S}^n$ par $(x_1, ..., x_m) \mapsto (x_1, ..., x_m, 0, ...0)$. Montrer que le complémentaire de $\mathbf{S}^m$ dans $\mathbf{S}^n$ a le type d'homotopie de $\mathbf{S}^{n-m-1}$.

10. Soit X un espace topologique. On note $\pi_0(X)$ l'ensemble de ses composantes connexes par arcs. Plus précisément, $\pi_0(X)$ est $X/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe $\gamma : [0, 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On note $[x]$ la classe de $x \in X$ dans $\pi_0(X)$.
10.a. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. En déduire une application $\pi_0(f)$: $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ par passage aux quotients.
10.b. Soit $g : X \to Y$ continue et homotope à f. Montrer que $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.
10.c. Montrer que, si X et Y ont même type d'homotopie, $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$ sont en bijection.
10.d. Montrer que $\pi_0(X) \times \pi_0(Y)$ est en bijection avec $\pi_0(X \times Y)$.

11. Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$. On dit que A est *contractile dans* X si l'inclusion $A \subset X$ est homotope à une application constante. Soient n et m des entiers avec $m < n$. Montrer que $\mathbf{S}^m$ est contractile dans $\mathbf{S}^n$.

12. Soit X un espace topologique séparé. Soit $A \subset X$. Montrer que s'il existe une rétraction $r : X \to A$, alors A est fermée dans X.

13. Soient $a = (1, 0)$, $b = (-1, 0) \in \mathbf{R}^2$. Considérons les cercles $\mathcal{C}(a, 1)$ et $\mathcal{C}(b, 1)$ centrés en a et b respectivement et de rayon 1. Montrer que $\mathcal{C}(a, 1) \cup \mathcal{C}(b, 1)$ est un rétract par déformations de $\mathbf{R}^2 - \{a, b\}$.

14. Notons $X = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, Y la bouteille de Klein et $Z = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Soit $M = X$, Y ou Z. Notons M^* pour M privé d'un point.
14.a. Montrer que pour tous $x, y \in M$, il existe un automorphisme de M qui envoie x vers y.
14.b. Lesquels parmi X^*, Y^* et Z^* sont homotopiquement équivalents ?

15. Pour $x \in \mathbf{R}$, posons dans $\mathbf{R}^2$: $E_x = \{x\} \times [0,1]$, $A = [0,1] \times \{0\}$ et $X = A \cup E_0 \cup \cup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$.
15.a. Montrer que $\{(0,0)\}$ est un rétract par déformation forte de X.
15.b. Montrer que $\{(0,1)\}$ est un rétract par déformation de X.
15.c. Montrer que $\{(0,1)\}$ n'est pas un rétract par déformation forte de X.

16. Pour $x \in \mathbf{R}$, posons dans $\mathbf{R}^2$: $E_x = \{x\} \times [0, 1-x]$, $A = [0,1] \times \{0\}$ et $X = A \cup E_0 \cup \cup_{x \in \mathbf{Q} \cap [0,1]} E_x$. Notons ρ la rotation de $\mathbf{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle $\pi/2$, σ la symétrie orthogonale de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la droite $y = 1/2$, et τ la translation de $\mathbf{R}^2$ par le vecteur $(1,-1)$. Posons $X' = \sigma \circ \rho(X)$, $Y = X \cup X'$ et $Z = \cup_{n \in \mathbf{Z}} \tau^n(Y)$.
16.a. Montrer que X est un rétract par déformation forte sur $x_0 \in X$ si et seulement si $x_0 \in A$.
16.b. Montrer que Z est un espace contractile.
16.c. Montrer que Z n'admet de rétraction par déformation forte sur aucun de ses points.

17. Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Le *cylindre d'application* M_f est $((X \times [0,1]) \coprod Y)/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1)\mathcal{R}f(x)$, pour $x \in X$.
17.a. Montrer que A admet une rétraction par déformation forte sur Y.
17.b. Montrer que $X \to M_f$ qui à x associe la classe de $(x,0)$ est un homéomorphisme sur son image $\tilde{X}$.
17.c. Si f est une équivalence d'homotopie, montrer que M_f est un rétract par déformation forte sur $\tilde{X}$.
17.d. Montrer que X et Y ont même type d'homotopie si et seulement si il existe un espace topologique Z et deux sous-espaces X' et Y' de Z, homémorphes à X et Y et tels que Z admet des rétractions par déformation forte vers X' et Y'.

18. Posons dans $\mathbf{R}^3$, $A = \{(0,0,z) \in \mathbf{R}^3 / |z| \leq 1\}$, $B = \{(0,y,z) \in \mathbf{R}^3 / y \geq 0, y^2 + z^2 = 1\}$, $\mathbf{S}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / {}^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $X = \mathbf{S}^3 \cup A$. Montrer que X/A est homotopiquement équivalent à X/B.

19. Soit X un espace topologique. Soit $x_0 \in X$. Notons A l'image de $\{x_0\} \times [-1,1]$ dans la suspension $S(X)$ de X. Posons $\Sigma(X, x_0) = S(X)/A$. C'est la *suspension réduite* de X avec point-base x_0.
19.a. Supposons que X soit un espace cellulaire et x_0 une 0-cellule de X. Montrer que $\Sigma(X, x_0)$ est homotopiquement équivalent à $S(X)$.
19.b. Supposons que X soit le bouquet de deux sphères de dimensions n et m respectivement. Notons x_0 le point commun aux deux sphères dans X. Montrer que $\Sigma(X, x_0)$ est homéomorphe au bouquet de deux sphères de dimensions $n+1$ et $m+1$ respectivement.

20. Pour $z \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{C}(z,1)$ le cercle de centre z et de rayon 1 dans $\mathbf{C}$. Posons $X_1 = \mathcal{C}(-1,1) \cup \mathcal{C}(1,1) \cup \mathcal{C}(i\sqrt{3}, 1)$, $X_2 = \mathcal{C}(-2,1) \cup \mathcal{C}(0,1) \cup \mathcal{C}(2,1)$ et X_3 le bouquet de trois cercles.
20.a. Lesquels de X_1, X_2 et X_3 sont homéomorphes ?
20.b. Lesquels de X_1, X_2 et X_3 ont le même type d'homotopie ?

21. Soit X un espace topologique muni de deux points fermés distincts x_0 et x_1 ((X, x_0, x_1) est un espace *bipointé*) et d'un homéomorphisme (la *duplication*) $\delta_X : X \to (X \coprod X)/\mathcal{R}_{x_0,x_1}$ où $\mathcal{R}_{x_0,x_1}$ est la relation d'équivalence qui identifie x_1 dans la première copie de X à x_0 dans la deuxième copie de X, avec $\delta_X(x_0)$ (resp. $\delta_X(x_1)$) est égal à x_0 (resp. x_1) dans la première (resp. deuxième) copie de X. On dit que (X, x_0, x_1, δ_X) est un espace topologique bipointé muni d'une duplication. Ces objets forment une catégorie dont les morphismes entre (X, x_0, x_1, δ_X) et (Y, y_0, y_1, δ_Y) sont constitués par les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, et $\delta_Y \circ f = f \coprod f \circ \delta_X$, où $f \coprod f$ se déduit de $f \coprod f : (X \coprod X) \to (Y \coprod Y)$ par passage aux quotients.
21.a. Montrer qu'il existe une duplication $\delta_{[0,1]}$ sur l'espace topologique bipointé $([0,1], 0, 1)$.
21.b. Montrer qu'on a une théorie de l'homotopie si on remplace l'espace topologique bipointé muni d'une duplication $([0,1], 0, 1, \delta_{[0,1]})$ par (X, x_0, x_1, δ_X).
21.c. Montrer qu'on a un morphisme $(X, x_0, x_1, \delta_X) \to ([0,1], 0, 1, \delta_{[0,1]})$. (Il est même unique. Autrement dit, le segment $[0,1]$ est un *objet terminal* dans la catégorie des espaces topologiques bipointés munis d'une duplication. C'est là, si on veut, une définition de l'intervalle $[0,1]$).