Université Paris Cité — Année 2023-24
L3 Mathématiques – Actions de groupes — L. Merel

Feuille 4

Groupes de matrices, isométrices

1. Soit n un entier ≥ 1. Soit K un corps commutatif.
1.a. Montrer que l'application $\mathcal{S}_n \to \mathrm{GL}_n(K)$, qui à σ associe la matrice de l'endomorphisme qui envoie le i-ème vecteur de la base canonique vers le $\sigma(i)$-ème vecteur, est un homomorphisme injectif de groupes.
1.b. En déduire que pour tout groupe fini G il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathrm{GL}_n(K)$ possède un sous-groupe isomorphe à G.

2. Soit K un corps commutatif.
2.a. Montrer que $\mathrm{GL}_2(K)$ admet un sous-groupe H isomorphe à $K^\times \times K^\times$.
2.b. Le sous-groupe H est-il normal dans $\mathrm{GL}_2(K)$?
2.c. Montrer qu'il admet un sous-groupe Δ de H isomorphe à $K^\times$ et qui est normal dans $\mathrm{GL}_2(K)$.
2.d. Soit $P = I_2 + N$ où N est l'ensemble des matrices triangulaires strictes de $\mathrm{GL}_2(K)$. Montrer que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(K)$. Est-il normal dans $\mathrm{GL}_2(K)$?

3. Soit K un corps fini à p éléments, avec p premier. Soit n un entier ≥ 1. Considérons le groupe $G = \mathrm{GL}_n(K)$. Soit $T = I_n + N$ où N est l'ensemble des matrices triangulaires strictes de $\mathrm{M}_n(K)$.
3.a. Quel est le cardinal de G ? Quel est le cardinal de T.
3.b. Montrer que T est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_n(K)$.
3.c. Quel est le stabilisateur de T pour l'action de G par conjugaison ?
3.d. En déduire le nombre de p-sous-groupes de Sylow de $\mathrm{GL}_n(K)$.

4. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ est-il normal dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$?

5. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ est-il normal dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$?

6. Soit K un corps commutatif.
6.a. Rappeler quelle est l'action de $\mathrm{PSL}_2(K)$ sur la droite projective $\mathbf{P}^1(K)$. Montrer qu'elle est fidèle.
6.b. Montrer que si tout sous-groupe H normal de $\mathrm{SL}_2(K)$ non-contenu dans $\{-\mathrm{Id}, \mathrm{Id}\}$ est égal à $\mathrm{SL}_2(K)$, alors $\mathrm{PSL}_2(K)$ est simple.
6.c. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(K)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ lorsque K a 2 éléments. Est-il simple ?
6.d. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(K)$ est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_4$ lorsque K a 3 éléments. Est-il simple ?
6.e. Supposons que $\mathrm{PSL}_n(K)$ est simple lorsque $n \geq 3$ ou lorsque $n \geq 2$ et K a au moins 4 éléments. Trouver deux groupes simples d'ordre 168.
6.f. On rappelle que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_5$. En déduire que, si le groupe $\mathrm{PSL}_2(K)$ est simple, il est isomorphe à $\mathcal{A}_5$ lorsque K a 4 ou 5 éléments.
6.g. Donner un morphisme de groupes $\mathrm{PSL}_2(K) \to \mathcal{S}_5$, lorsque K a 4 éléments. Montrer que ce morphisme est injectif, puis que son image est $\mathcal{A}_5$.
6.h. Supposons désormais que K a 5 éléments. Montrer que l'union des matrices diagonales et antidiagonales constitue un 2-Sylow de $\mathrm{PSL}_2(K)$.
6.i. En déduire que les 2-Sylow de $\mathrm{PSL}_2(K)$ sont en bijection avec les paires de droites de K^2. Combien y a-t-il de 2-Sylow ?
6.j. En déduire que $\mathrm{PSL}_2(K)$ agit sur un ensemble à 5 éléments et que cette action est fidèle.
6.k. En déduire que $\mathrm{PSL}_2(K)$ est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

7. Soit K un corps commutatif. Soit B le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_2(K)$ formé par les matrices triangulaires supérieures.
7.a. Montrer que B est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(K)$. Est-il normal ?
7.b. Rappeler l'action de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur $\mathbf{P}^1(K)$. Quel est le stabilisateur dans $\mathrm{GL}_2(K)$ du point à l'infini ?
7.c. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur $\mathbf{P}^1(K)$ est transitive.
7.d. En déduire une bijection entre $\mathrm{GL}_2(K)/B$ et $\mathbf{P}^1(K)$.

7.e. Montrer que l'action de $\mathrm{SL}_2(K)$ sur $\mathbf{P}^1(K)$ est transitive.
7.f. Décrire le groupe $C = B \cap \mathrm{SL}_2(K)$. En déduire une bijection entre $\mathrm{SL}_2(K)/C$ et $\mathbf{P}^1(K)$.

8. Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C}/\Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ de déterminant > 0. Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, et $z \in \mathcal{H}$, on pose $\gamma.z = (az+b)/(cz+d)$. C'est l'*action homographique*.
8.a. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ est un groupe.
8.b. Montrer que l'action homographique définit une action de groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ sur $\mathcal{H}$.
8.c. En déduire une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathcal{H}$.
8.d. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}$.
8.e. Quel est le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$?
8.f. En déduire une bijection entre $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ et $\mathcal{H}$.

9.a. Montrer qu'on a un morphisme surjectif de groupes $\mathbf{R} \to \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ de noyau $\mathbf{Z}$.
9.b. En déduire que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.
9.c. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est contenu dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, puis qu'il est cyclique.
9.d. En déduire que tout sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ est cyclique.
9.e. Quel est l'indice de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$?
9.f. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ possède un sous-groupe cyclique d'indice 1 ou 2.
9.g. En déduire qu'il est cyclique ou diédral.

10. Soit n un entier ≥ 2. Montrer que le centre de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est égal à $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$.

11. Quel est le groupe des isométries de $\mathbf{Z}$, vu comme contenu dans l'espace euclidien $\mathbf{R}$? D'un triangle non isocèle dans le plan ? D'un rectangle non carré dans le plan ? D'une ellipse dans le plan ? D'un triangle isocèle ? De l'ensemble $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{R}^2$?

12. Quel est le groupe des isométries d'une toupie, d'une étoile de mer, d'une méduse, d'une sole, d'une étoile (une boule), d'une bulle de savon (une sphère), d'un escalier infini en colimaçon, de la Bibliiothèque Nationale de France, de la pyramide du Louvre, de l'obélisque de la Concorde, de l'Arc de Triomphe, de la Tour Eiffel ?

13.a. Constater que les sommets d'un dodécaèdre régulier (ou, ce qui en revient au même, les centres des faces d'un icosaèdre) sont la réunion de l'ensemble des sommets de cinq tétraèdres réguliers.
13.b. En déduire que le groupe G des isométries de l'icosaèdre opère non trivialement sur cinq éléments.
13.c. En déduire un morphisme de groupe $G \to \mathcal{S}_5$.

14. Soit K un corps fini non nécessairement commutatif. On note p sa caractéristique. C'est un nombre premier. Posons $Z = \{x \in K/xy = yx, y \in K\}$ le centre de K. Notons q son nombre d'éléments. Pour $x \in K$, posons $C_x = \{y \in K/xy = yx\}$.
14.a. Montrer que Z est un corps commutatif, que K est un espace vectoriel de dimension finie sur Z. Notons n sa dimension.
14.b. Montrer K possède q^n éléments.
14.c. Montrer que C_x est un corps, non nécessairement commutatif, qui contient Z. Notons n_x sa dimension comme espace vectoriel sur Z.
14.d. Montrer que n_x divise n et que, si $x \notin Z$, on a $n_x < n$.
14.e. Montrer que $K^\times$ opère sur lui-même par conjugaison.
14.f. Montrer la formule $q^n - 1 = \sum_x (q^n - 1)/(q^{n_x} - 1)$, où x parcourt un système de représentants des orbites de $K^\times$ sous l'action de $K^\times$ par conjugaison.
14.g. Quelle est l'orbite des éléments de Z sous l'action de $K^\times$ par conjugaison ?
14.h. En déduire la formule $q^n - 1 = q - 1 + \sum_x (q^n - 1)/(q^{n_x} - 1)$ où x parcourt un système de représentants des orbites de $K^\times - Z^\times$ sous l'action de $K^\times$ par conjugaison.
14.i. Notons Φ_n le n-ème polynôme cyclotomique. C'est le polynôme dont les racines sont les racines primitives n-èmes de l'unité. Montrer que c'est un polynôme à coefficients entiers.
14.j. Montrer que $\Phi_n(q)$ divise $q - 1$.
14.k. Soit ζ une racine n-ème de l'unité dans $\mathbf{C}$. Si $\zeta \neq 1$, montrer que $|q - \zeta| > |q - 1|$.
14.l. Factoriser Φ_n et en déduire que $n = 1$. En déduire que tout corps fini est commutatif.