

Feuille 3 — Espaces cellulaires et actions de groupes

Espaces cellulaires

1. Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence sur $[0, 1]^2$ dont les classes sont $\{(x, 0), (x, 1)\}$, pour $x \in [0, 1]$, et $\{(0, y), (1, y)\}$, pour $y \in [0, 1]$. Montrer que $[0, 1]^2/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, et à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Indiquer comment $[0, 1]^2/\mathcal{R}$ est muni d'une structure d'espace cellulaire.
 2. Soit n un entier ≥ 0 . Indiquer une structure d'espace cellulaire de \mathbf{S}^n .
 3. Posons $D = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3/x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $A = \{(0, 0, z) \in \mathbf{R}^3/z^2 \leq 1\}$. Décrire des structures d'espace cellulaire de $\mathbf{S}^2 \cup A$, $\mathbf{S}^2 \cup D$ et $\mathbf{S}^2 \cup D \cup A$.
 4. Soit n un entier ≥ 0 . Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence sur \mathbf{R}^n dont les classes sont $\{x, -x\}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Restreinte à la sphère \mathbf{S}^{n-1} , c'est la relation *antipodale*.
 - 4.a. Montrer que l'espace projectif réel $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est homéomorphe à \mathbf{S}^n/\mathcal{R} .
 - 4.b. Notons $\mathbf{S}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{S}^n/x_n > 0\}$ (la *demi-sphère*). Montrer que le bord de \mathbf{S}_+^n est homéomorphe à \mathbf{S}^{n-1} . Montrer que $\mathbf{S}_+^n/\mathcal{R}$ est homéomorphe à \mathbf{S}^n/\mathcal{R} .
 - 4.c. Décrire une structure d'espace cellulaire de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.
 5. Soit n un entier ≥ 0 . La sphère (resp. boule) unité de \mathbf{C}^{n+1} , notée par abus \mathbf{S}^{2n+1} (resp. \mathbf{B}^{2n+2}) est $\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}/|z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$ (resp. $\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}/|z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 \leq 1\}$). On la munit de la relation d'équivalence \mathcal{R} telle que $(z_1, \dots, z_{n+1})\mathcal{R}(\lambda z_1, \dots, \lambda z_{n+1})$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$. Soit $f : \mathbf{B}^{2n+2} \rightarrow \mathbf{R}_+$ qui à $\{(z_1, \dots, z_{n+1})$ associe $\sqrt{1 - (|z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2)}$.
 - 5.a. Montrer que cette sphère unité est homéomorphe à la sphère usuelle \mathbf{S}^{2n+1} .
 - 5.b. Montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{2n+1}/\mathcal{R}$.
 - 5.c. Montrer que $\mathbf{S}^{2n+1}/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{B}^{2n+2}/\mathcal{R}$.
 - 5.d. En déduire une structure d'espace cellulaire de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.
 6. Soit $X = \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^2$ le bouquet d'un cercle et d'une sphère. Indiquer une structure d'espace cellulaire pour X , puis pour $C(X)$ et $S(X)$.
 7. Soient X et Y deux Espaces cellulaires de dimensions finies. Donner une structure d'espace cellulaire à $X \times Y$ et au bouquet $X \vee Y$.
 8. Soit X un espace cellulaire. Soit A un sous-espace cellulaire de X . Montrer que X/A , $C(X)$ et $S(X)$ ont des structures d'espace cellulaire.
 9. Montrer que $\{1/n/n \in \mathbf{Z}, n > 0\} \cup \{0\}$ n'est pas homéomorphe à un espace cellulaire.
 - 10.a. Montrer que \mathbf{R} est un espace cellulaire dont les cellules sont de dimensions 0 et 1.
 - 10.b. Soit n un entier ≥ 0 . En déduire que \mathbf{R}^n est un espace cellulaire.
 11. Considérons l'espace topologique X (le *parachute*) obtenu en recollant les trois sommets du simplexe Δ_2 . Montrer que X est muni d'une structure d'espace cellulaire.
 12. La *bouteille de Klein* (resp. le *ruban de Moebius*) est l'espace $[0, 1]^2$ modulo la relation d'équivalence dont les classes sont $\{(0, y), (1, y)\}$ ($0 \leq y \leq 1$) et $\{(x, 0), (1 - x, 1)\}$ ($0 \leq x \leq 1$) (resp. les classes sont $\{(x, 0), (1 - x, 1)\}$ ($0 \leq x \leq 1$)). Montrer que ces espaces sont munis d'une structure d'espace cellulaire.
- #### Actions de groupes
13. Soit n un entier ≥ 1 . Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$.
 14. Soit n un entier ≥ 1 . L'espace *unitaire tangent* à la sphère \mathbf{S}^n est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{S}^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ avec y unitaire orthogonal à x . On le note $T(\mathbf{S}^n)$. Montrer que $T(\mathbf{S}^2)$ est homéomorphe à $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$.
 15. Notons \mathcal{R} la relation antipodale sur la sphère \mathbf{S}^2 . On considère cette sphère comme le bord de \mathbf{B}^3 . On étend \mathcal{R} à \mathbf{B}^3 , en imposant que les classes d'équivalence dans $\mathbf{B}^3 - \mathbf{S}^2$ sont les singletons.

15.a. Montrer que $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ est isomorphe à \mathbf{B}^3/\mathcal{R} .

15.b. En considérant une application continue $\mathbf{B}^3 \rightarrow \text{SO}(3)$, montrer que $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ est homéomorphe à $\text{SO}(3)$.

16. Soit G un groupe topologique séparé. Notons e son élément neutre. Soit H un sous-groupe discret de G . Notons q la surjection canonique $G \rightarrow G/H$.

16.a. Montrer qu'il existe deux voisinages V et W de e tels que $W \cap H = \{e\}$, $V = V^{-1}$, et $V.V^{-1} \subset W$. En déduire que, pour $h, h' \in H$, $h \neq h'$, on a $hV \cap h'V = \emptyset$.

16.b. Montrer que H est fermé dans G . En déduire que G/H est un espace topologique séparé.

16.c. Supposons H distingué dans G . Montrer que, lorsque G est connexe, tout élément de H commute à tout élément de G . En déduire que H est commutatif.

16.d. Supposons H distingué dans G . Montrer qu'il existe un voisinage U de l'élément neutre \bar{e} de G/H , une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts deux à deux disjoints de G tels que $q^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i$, et, pour tout $i \in I$, $q|_{U_i}$ est un homéomorphisme $U_i \rightarrow U$. Même question en remplaçant \bar{e} par un élément quelconque g de G/H .

17. Soient k et n des entiers ≥ 1 , avec $n \geq k$. On identifie le groupe $O(n-k)$ (resp. $O(k) \times O(n-k)$) à un sous-groupe de $O(n)$ par l'application $M \mapsto \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ (resp. $(M, N) \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$).

17.a. Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ agit transitivement sur la sphère \mathbf{S}^{n-1} .

17.b. Établir des homéomorphismes $O(n)/O(n-1) \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ et, pour $n \geq 2$, $\text{SO}(n)/\text{SO}(n-1) \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$.

18. Soient k et n des entiers ≥ 1 , avec $n \geq k$. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , par exemple \mathbf{R}^n . La variété de Stiefel associée $V_{k,n}(\mathbf{R})$ est formée par les k -uplets $(a_1, \dots, a_k) \in E^k$ de vecteurs unitaires, deux-à-deux orthogonaux. Montrer que $O(n)$ agit transitivement sur $V_{k,n}$, puis qu'on a des homéomorphismes $O(n)/O(n-k) \rightarrow V_{k,n}(\mathbf{R})$ et, pour $n > k$, $\text{SO}(n)/\text{SO}(n-k) \rightarrow V_{k,n}(\mathbf{R})$.

19. Soient k et n des entiers ≥ 1 , avec $n \geq k$. On note $\text{Gr}_{k,n}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbf{R}^n . C'est la variété de Grassmann ou grassmannienne réelle. On la munit de la topologie quotient issue de l'application $V_{k,n}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Gr}_{k,n}$ qui à un k -uplet associe l'espace engendré par ce k -uplet.

19.a. Soit $a \in \mathbf{R}^n$. Montrer que l'application $V_{k,n}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ qui à (v_1, \dots, v_k) associe $\min\{d(a, x)^2/x \in \mathbf{R}v_1 + \dots + \mathbf{R}v_k\}$ est continue. En déduire que $\text{Gr}_{k,n}$ est un espace topologique séparé.

19.b. Montrer qu'on a un homéomorphisme $\text{Gr}_{k,n} \simeq O(n)/(O(k) \times O(n-k))$.

19.c. Montrer que l'application qui à un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n associe son orthogonal définit un homéomorphisme $\text{Gr}_{k,n} \rightarrow \text{Gr}_{n-k,n}$.

20. Posons $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \text{M}_2(\mathbf{C})/a, b \in \mathbf{C} \right\}$ (les quaternions). Soit $m = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$. On pose $\bar{m} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\|m\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$, $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

20.a. Montrer que \mathbf{H} est un sous-espace vectoriel réel de dimension 4 de $\text{M}_2(\mathbf{C})$ de base $(1, I, J, K)$ et que c'est une sous-algèbre de $\text{M}_2(\mathbf{C})$.

20.b. Montrer qu'on a $m\bar{m} = \|m\|^2 1$. En déduire que \mathbf{H} est un corps. Montrer que le centre de \mathbf{H} (c'est-à-dire l'ensemble de ses éléments qui commutent à tout \mathbf{H}) est le sous-corps $\mathbf{R}1$ (identifié à \mathbf{R}).

20.c. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur \mathbf{H} , et une norme de l'anneau \mathbf{H} . Montrer que la sphère $\mathbf{S}(\mathbf{H})$ de rayon 1 de \mathbf{H} est un sous-groupe de \mathbf{H}^* . Donner une bijection $\mathbf{S}(\mathbf{H}) \simeq \text{SU}(2)$.

20.d. On pose $P = \{xI + yJ + zK/(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$ (ensemble des quaternions purs). Montrer que P est stable par conjugaison par \mathbf{H}^* . En déduire un isomorphisme de groupes $\mathbf{H}^*/\mathbf{R}^* \simeq \text{SU}(2)/\{-1, 1\}$.

20.e. Démontrer que la conjugaison par $m \in \mathbf{H}^*$ est une isométrie de P . En déduire un morphisme de groupes $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ de noyau $\{-1, 1\}$.

20.f. Montrer que la conjugaison par $m \in \mathbf{H}^*$ se factorise par l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{H}) \simeq \mathbf{RP}^3$. En déduire une bijection $\mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \simeq \text{SO}(3)$.

20.g. Soient $m, n \in \mathbf{H}^*$. Notons $\phi_{m,n} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ l'application donnée par $\phi(h) = mhn^{-1}$. En déduire qu'on a un morphisme surjectif de groupes $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(4)$ de noyau $\{(1, 1), (-1, -1)\}$.

20.h. Montrer que la bijection $\mathbf{S}(\mathbf{H}) \simeq \text{SU}(2)$ est un homéomorphisme, que le morphisme de groupes $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ est un revêtement double, que la bijection $\mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \simeq \text{SO}(3)$ est un homéomorphisme, que le morphisme de groupes $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(4)$ est un revêtement double.