Université Paris Cité | Année 2022-23
M1 mathématiques – Topologie algébrique | L. Merel

Feuille 2 — Quelques espaces topologiques

Topologie initiale, topologie finale

1.a. Montrer qu'on peut munir $\mathbf{R}$ de la topologie dont les ouverts sont : $\emptyset$, $\mathbf{R}$ et les demi-droites de la forme $]a,+\infty[$ avec $a \in \mathbf{R}$.
1.b. Pour cette topologie, pour quelles valeurs de a, $b \in \mathbf{R}$ l'application $x \mapsto ax + b$ est-elle continue ?
1.c. Pour cette topologie, décrire les topologies initiales et finales associées aux applications $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ données par $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

2. Montrer que la topologie produit (sur un produit d'espaces topologiques) est la topologie initiale pour les projections sur les coordonnées.

3. Soit E un ensemble non vide muni de la topologie discrète. Posons $X = \mathbf{R} \times E$, que l'on munit de la topologie produit. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur X donnée par le fait que deux élément sont en relation si et seulement si ils sont égaux ou si leurs premières coordonnées sont toutes deux nulles. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. Pour $p_1 = (x_1, e_1)$, $p_2 = (x_2, e_2) \in X/\mathcal{R}$ on pose $d(p_1, p_2) = |x_2 - x_1|$ si $e_1 = e_2$ et $d(p_1, p_2) = |x_2| + |x_1|$ si $e_1 \neq e_2$.
3.a. Indiquer une base de voisinages d'un point de $X/\mathcal{R}$.
3.b. Montrer que d définit une distance sur $X/\mathcal{R}$.
3.c. À quelle condition sur E, l'espace $X/\mathcal{R}$ est-il homémorphe à $X/\mathcal{R}$ muni de la topologie définie par d ?
3.d. Pour a, $b \in \mathbf{R}$, notons $f_{a,b}$ l'application affine $x \mapsto ax + b$. Notons π_1 la projection $X \mapsto \mathbf{R}$ sur la première coordonnée. Montrer que $f_{a,b} \circ \pi_1$ définit une application continue $F_{a,b} : X/\mathcal{R} \to \mathbf{R}$.
3.e. On munit $\mathbf{R}$ de la topologie initiale associée aux applications $f_{a,b}$, pour a, $b \in \mathbf{R}$. Montrer que $\mathbf{R}$ muni de cette topologie est homéomorphe à $\mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle.
3.f. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie initiale associée aux applications $F_{a,b}$ pour a, $b \in \mathbf{R}$. Obtient-on un espace homéomorphe à $X/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient de X ?

4. Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$ une partie ouverte ou fermée.
4.a. Montrer que la sujection canonique $\pi : X - A \to X/A$ induit un homéomorphisme sur son image.
4.b. Montrer que ce n'est nécessairement le cas si A n'est pas ouverte, ou pas fermée.
4.c. Soit i l'injection canonique $A \to X$. Soit s une application constante $A \to \{0\}$. Soit l'espace topologique $X \cup_A \{0\}$ obtenu par recollemement par rapport à i et s. Montrer qu'il est homéomorphe à X/A.
4.d. Soit Y un espace topologique. Soit $B \subset Y$. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme qui induit un homéomorphisme $A \to B$. Montrer que X/A et Y/B sont homéomorphes.

5. Soient X et Y des espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$. Posons $I = [0, 1]$. Soit $A \subset X$.
5.a. Montrer que Y est muni de la topologie finale pour f si et seulement si, pour tout espace topologique Z, les applications continues $g : Y \to Z$ sont précisément celles pour lesquelles $g \circ f$ est continue.
5.b. Soit Q un ensemble. Soit π une application surjective $X \to Q$. On muni Q de la topologie finale pour π. Soit L un espace topologique localement compact. Montrer que $Q \times L$ est muni de la topologie finale pour $\pi \times \mathrm{id}_L : X \times L \to Q \times L$.
5.c. On muni $X \times I$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ engendrée par $(a,t)\mathcal{R}(a',t')$ si et seulement si a, $a' \in A$ et t, $t' \in I$. Montrer que les espaces $(X \times I)/\mathcal{R}$ et $X/A \times I$ sont homéomorphes.

Sphères et espaces projectifs

6. On rappelle que pour n entier ≥ 0, la *n-sphère* est le sous espace topologique de $\mathbf{R}^{n+1}$ formée par les points $(x_0, x_1, ..., x_n)$ tels que $x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$. Elle est notée $\mathbf{S}^n$. On note $\mathbf{B}^n$ la boule unité dans $\mathbf{R}^n$.
6.a. Montrer que $(\mathbf{S}^1)^n$est homéomorphe à $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ où ce groupe quotient est muni de la topologie quotient.
6.b. Montrer que $\mathbf{S}^n$ est compacte, connexe par arcs, et séparée.
6.c. Montrer que $\mathbf{S}^{n-1}$ est la frontière de $\mathbf{B}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\mathbf{B}^n/\mathbf{S}^{n-1}$ est isomorphe à $\mathbf{S}^n$.
6.d. Montrer que $\mathbf{B}^n$ est convexe. En déduire qu'elle est connexe.

7. Soit X un espace topologique. Soient $S(X) = X \times [-1,1]/(X \times \{-1\}, X \times \{1\})$ la suspension sur X et $C(X) = X \times [0,1]/X \times \{1\}$ le cône sur X. Soit Y un espace topologique homéomorphe à X.
7.a. Montrer que $C(X)$ (resp. $S(X)$) et $C(Y)$ (resp. $S(Y)$) sont homéomorphes.
7.b. Montrer que $S(X)$ est homéomorphe à $C(X)/X \times \{0\}$.
7.c. Soit n un entier ≥ 0. Montrer que $S(\mathbf{S}^n)$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n+1}$.
7.d. On note $\mathbf{B}^n$ la boule unité dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que les espaces $\mathbf{B}^{n+1}$, $C(\mathbf{B}^n)$ et $S(\mathbf{B}^n)$ sont isomorphes.

8. Soit K un corps. Soit n un entier ≥ 0. L'espace projectif de dimension n sur K est l'ensemble quotient $K^{n+1} - \{0\}/R$ où R est la relation d'équivalence donnée par xRy si et seulement x et y sont colinéaires. Il est noté $\mathbf{P}^n(K)$. Lorsque K est muni d'une topologie, on en déduit une topologie sur K^{n+1}, et donc sur $K^{n+1} - \{0\}$. L'espace $\mathbf{P}^n(K)$ est muni de la topologie quotient. C'est en particulier le cas si $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$. Montrer que les espaces $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sont connexes, compacts et séparés.

9. Considérons la sphère unité $\mathbf{S}^2$ dans $\mathbf{R}^3$. Notons $N = (0,0,1)$ son *pôle nord*. Considérons le plan P de $\mathbf{R}^3$ noyau de la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto z$. La *projection stéréographique* est l'application bijective $\mathbf{S}^2 - N \to P$ qui à $M \in \mathbf{S}^2$, $M \neq N$, associe le point d'intersection entre la droite MN et P. Notons f sa réciproque. On identifie P à $\mathbf{C}$, et donc à $\mathbf{C} \times \{1\}$.
9.a. Construire une application $\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{S}^2$ dont la restriction à $\mathbf{C} \times \{1\}$ coïncide avec f.
9.b. En déduire que $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^2$.

Produits et projections

10. On considère $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète et $X = \mathbf{R} \times \{0,1\}$ muni de la topologie produit. On munit X de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui met en relation deux éléments si et seulement si ils sont égaux ou si leur premières coordonnées sont égales et non nulles. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient.
10.a. Faire un dessin. Donner une base de voisinages de $(0,0)$
10.b. Quels axiomes de séparabilité sont satisfaits par $X/\mathcal{R}$?

11. Soient X et L deux espaces topologiques. Notons $\pi : X \times L \to X$ la projection sur la première coordonnée.
11.a. Montrer que π est une application ouverte.
11.b. Supposons L compact. Montrer que π est une application fermée.
11.c. Donner un exemple où π n'est pas une application fermée.

12. Soient X et Y deux espaces topologiques. Considérons $X \times Y$ muni de la topologie produit.
12.a. Montrer que $X \times Y$ est connexe (resp. connexe par arcs, resp. localement connexe, resp. localement connexe par arcs) si et seulement si X et Y sont connexes (resp. connexes par arcs, resp. localement connexes, resp. localement connexes par arcs)).
12.b. Montrer que les composantes connexes (resp. connexes par arc) de $X \times Y$ sont les produits des composantes connexes (resp. connexes par arc) de X et Y.
12.c Montrer que $X \times Y$ est compact (resp. séquentiellement compact, resp. localement compact) si et seulement si X et Y sont compacts (resp. séquentiellement compacts, resp. localement compacts).
12.d. Montrer que $X \times Y$ est T_n si et seulement si X et Y sont T_n, pour $n = 0$, 1 ou 2.
12.e. Montrer que $X \times Y$ est séparable si et seulement si X et Y sont séparables.
12.f. Montrer que $X \times Y$ est à base dénombrable si et seulement si X et Y sont à base dénombrable.

13. Soit l'espace topologique produit $H = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1/n]$. C'est le *cube de Hilbert*.
13.a. Montrer qu'il est homéomorphe à $\prod_{n=1}^{\infty} [0,1]$.
13.b. Montrer que d donnée par $d((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}) = (\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2)^{1/2}$ est une distance sur H.
13.c. En déduire que c'est un espace topologique métrique (on dit qu'il est muni de la *métrique* l^2).
13.d. Montrer qu'il est convexe (et donc connexe par arcs) compact et séquentiellement compact (sans Tychonoff).
13.e. Montrer que H, muni de la topologie des boîtes (*i.e.* la topologie engendrée par les produits d'ouverts de chacun des facteurs), n'est pas compact.
13.f. Montrer que H, en tant que sous-espace de $\prod_{n=1}^{\infty} [0,1]$ muni de la topologie produit, est d'intérieur vide.
13.g. La topologie du cube de Hilbert est-elle induite par la topologie produit de $\prod_{n=1}^{\infty} [0,1]$?