16/12/2022 | L2 Math
Université Paris Cité | Algèbre

Contrôle final

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculettes et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Considérons l'élément suivant du groupe symétrique S_8 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Déterminer la signature de σ.
4. Quel est l'ordre de σ ?
5. Trouver $\tau \in S_8$ tel que $\tau^5 = \sigma$.
6. Quel est l'ordre de τ ?

Exercice 2. Soit a, b, $c \in \mathbf{R}$. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Lorsque $b = c = 0$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de a, b et c a-t-on $\det(f) = 0$?
3. Déterminer le polynôme caractéristique P_f de f.
4. Montrer que P_f est scindé sur $\mathbf{R}$.
5. Montrer que les racines de P_f ne sont pas simples si et seulement si $b = c = 0$.
6. Lorsque $(b, c) \neq (0, 0)$, déterminer un vecteur propre de f.
7. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
8. L'endomorphisme f est-il nilpotent ?
9. Donner une base de trigonalisation de f.
10. Montrer que $(f - a\mathrm{Id})^3 = d(f - a\mathrm{Id})$ avec $d \in \mathbf{R}$ que l'on déterminera.
11. Lorsque $a = 0$, donner une formule pour f^n, pour n entier ≥ 1.
12. Donner le polynôme caractéristique de f^n, pour n entier ≥ 1.

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le polynôme caractéristique de f.
2. Montrer que f est nilpotent.
3. Quel est l'indice de nilpotence de f ?
4. Quels sont les noyaux de f, f^2 et f^3 ?
5. Donner une base de trigonalisation de f.