
Contrôle final

Les exercices 2 et 3 sont indépendants de l'exercice 1. Mais l'exercice 3 suit l'exercice 2. Les documents, calechettes et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Considérons l'élément suivant du groupe symétrique S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Déterminer la signature de σ .
4. Quel est l'ordre de σ ?
5. Y a-t-il un élément d'ordre 12 dans S_7 ?
6. Y a-t-il des sous-groupes non isomorphes d'ordre 12 dans S_7 ?

Exercice 2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $u : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a-1 \\ a-1 & a & a+1 \\ a+1 & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la trace de u ?
2. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $-(X-3a)(X^2+3)$.
3. Quel est le déterminant de u ?
4. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme u est-il bijectif ?
5. Quelles sont les valeurs propres de u ?
6. Déterminer un vecteur propre pour u .
7. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
8. Montrer que le plan P formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, avec $x + y + z = 0$, est stable par u .
9. Quel est le polynôme caractéristique de la restriction de u au plan P ?

Exercice 3. Soit $a \in \mathbf{C}$. Soit $v : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a-1 \\ a-1 & a & a+1 \\ a+1 & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de v ?
2. L'endomorphisme v est-il trigonalisable ?
3. Montrer que si $a \neq i\sqrt{3}/3$ et $a \neq -i\sqrt{3}/3$ l'endomorphisme v est diagonalisable.
4. Montrer que la restriction de v au plan Q formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3$, avec $x + y + z = 0$, est diagonalisable.
5. L'endomorphisme v est-il diagonalisable si $a = i\sqrt{3}/3$ ou $a = -i\sqrt{3}/3$?