13/01/2022 L2 Math
Université de Paris Algèbre

Contrôle final

Les exercices 1 et 2 sont indépendants. Les documents, calculettes et téléphones sont interdits.

Exercice 1. Considérons l'élément suivant du groupe symétrique S_8 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Déterminer la signature de σ.
4. Quel est l'ordre de σ ?
5. Y a-t-il un élément $\tau \in S_8$ tel que $\tau^2 = \sigma$?

Exercice 2. Soit $u : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 / x + y + z + t = 0 \}$. Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$, où a, $b \in \mathbf{R}$. Notons I la matrice identité dans $M_4(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe r, $s \in \mathbf{R}$ tels que $A^2 = rI + sA$.
2. En déduire que toute valeur propre λ de u vérifie $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.
3. Montrer que u est bijectif.
4. Montrer que e_1 est un vecteur propre pour u.
5. Montrer que F est stable par u.
6. Montrer que (e_2, e_3, e_4) est une base de F.
7. Quelle est la matrice de la restriction à F de u dans cette base ?
8. Donner une base de diagonalisation de u.
9. Quelle est la matrice de passage à cette base depuis la base canonique ?
10. Quel est le polynôme caractéristique de u ?
11. Quel est le polynôme minimal de u ?
12. Montrer que la matrice B commute à A.
13. Montrer que B est diagonalisable.
14. Donner son polynôme caractéristique.
15. Calculer A^n pour n entier ≥ 0.