16/12/2022 L2 Math
Université Paris Cité Algèbre

Corrigé du contrôle final

Exercice 1. Considérons l'élément suivant du groupe symétrique S_8 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. / On a $\sigma = (174)(2863)$.
2. Décomposer σ en produit de transpositions. / On a $\sigma = (17)(74)(28)(86)(63)$.
3. Déterminer la signature de σ. / Comme σ est produit de 5 transposition, sa signature est $(-1)^5 = -1$.
4. Quel est l'ordre de σ ? / Comme σ est le produit d'un 4-cycle et d'un 3-cycle à supports disjoints, et que 4 et 3 sont premiers entre eux, l'ordre de σ est $4.3 = 12$.
5. Trouver $\tau \in S_8$ tel que $\tau^5 = \sigma$. / On a $\sigma^{25} = \sigma^{2.12}\sigma = (\sigma^{12})^2\sigma = \sigma$. Donc $\tau = \sigma^5 = (174)^5(2863)^5 = (147)(2863)$ convient.
6. Quel est l'ordre de τ ? / C'est l'ordre du produit d'un 4-cycle et d'un 3-cycle à supports disjoints. C'est donc 12, comme ci-dessus.

Exercice 2. Soit a, b, $c \in \mathbf{R}$. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Lorsque $b = c = 0$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? / Oui, cela se voit sur la matrice qui est diagonale.
2. Pour quelles valeurs de a, b et c a-t-on $\det(f) = 0$? / Le déterminant de f est $a(a^2 - b^2 - c^2)$. Il est nul pour $a = 0$, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ et $a = -\sqrt{b^2 + c^2}$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique P_f de f. / C'est $(a-X)((a-X)^2 - b^2 - c^2) = (a - X)(a - \sqrt{b^2 + c^2} - X)(a + \sqrt{b^2 + c^2} - X)$.
4. Montrer que P_f est scindé sur $\mathbf{R}$. / C'est évident sur la forme cidessus, puisque $b^2 + c^2$ est un réel ≥ 0.
5. Montrer que les racines de P_f ne sont pas simples si et seulement si $b = c = 0$. / Les racines de P_f coïncident si et seulement si $b^2+c^2 = 0$, c'est-à-dire $b = c = 0$.

6. Lorsque $(b,c) \neq (0,0)$, déterminer un vecteur propre de f. / Le vecteur $(c,0,-b)$ est propre pour la valeur propre a.
7. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? / Oui si $b = c = 0$. Oui aussi sinon, puisque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
8. L'endomorphisme f est-il nilpotent ? / Non puisque 0 n'est pas seule valeur propre de P_f.
9. Donner une base de trigonalisation de f. / Les vecteurs propres sont $(c,0,-b)$, $(b/\sqrt{b^2+c^2}, 1, c/\sqrt{b^2+c^2})$ et $(-b/\sqrt{b^2+c^2}, 1, -c/\sqrt{b^2+c^2})$.
10. Montrer que $(f - a\mathrm{Id})^3 = d(f - a\mathrm{Id})$ avec $d \in \mathbf{R}$ que l'on déterminera. / D'après la forme du polynôme caractéristique et le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(f - a\mathrm{Id})((f - a\mathrm{Id})^2 - (b^2+c^2)\mathrm{Id}) = 0$. Donc $d = b^2 + c^2$.
11. Lorsque $a = 0$, donner une formule pour f^n, pour n entier ≥ 1. / On a alors $f^3 = df$ et donc $f^n = d^{(n-1)/2} f$ si n est impair et $f^n = d^{(n-2)/2} f^2$ si n est pair.
12. Donner le polynôme caractéristique de f^n, pour n entier ≥ 1. / Les racines du polynôme caractéristique de f^n sont les valeurs propres de f élevées à la puissance n. Ainsi, on a $P_{f^n} = -(X - a^n)(X - (a - \sqrt{b^2+c^2})^n)(X - (a + \sqrt{b^2+c^2})^n)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le polynôme caractéristique de f. / C'est $-X^3$.
2. Montrer que f est nilpotent. / C'est le cas puisque le polynôme caractéristique de f est une puissance de X.
3. Quel est l'indice de nilpotence de f ? / On a $f^3 = 0$ par Cayley-Hamilton. Comme $A^2 \neq 0$, on a $f^2 \neq 0$ et donc l'indice de nilpotence de f est 3.
4. Quels sont les noyaux de f, f^2 et f^3 ? / Le noyau de f est engendré par le vecteur $(i,0,1)$. Le noyau de f^2 est engendré par $(0,1,0)$ et $(-1,0,i)$.
5. Donner une base de trigonalisation de f. / Il suffit de considérer un vecteur u qui n'est pas dans le noyau de f^2. Alors $(f^2(u), f(u), u)$ est une base de trigonalisation. On peut choisir $u = (1,0,0)$. On obtient $f(u) = (0,i,0)$ et $f^2(u) = (-1,0,i)$.