Corrigé du contrôle final

Exercice 1.

1. On a $\sigma = (1\,7)(2\,3\,4)$.
2. On a $\sigma = (1\,7)(2\,3)(3\,4)$.
3. Comme σ est produit de 3 transpositions, sa signature est -1.
4. Comme $(1\,7)$ et $(2\,3\,4)$ commutent (car à supports disjoints) et sont d'ordre 2 et 3 respectivement, σ est d'ordre 6.
5. Oui, par exemple $(1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)$ qui est un produit de cycles à supports disjoints d'ordre 3 et 4 respectivement.
6. L'élément d'ordre 12 ci-dessus engendre un sous-groupe cyclique H d'ordre 12 de S_7. Mais le groupe alterné A_4 est un sous-groupe de S_7 d'ordre 12. Il n'est pas cyclique et donc pas isomorphe à H.

Exercice 2.

1. C'est la somme des éléments diagonaux de A, c'est-à-dire $3a$.
2. Par exemple on peut développer par la règle de Sarrus.
3. C'est la valeur du poynôme caractéristique en $X = 0$. C'est donc $9a$.
4. L'endomorphisme u est bijectif si et seulement si $\det(A) \neq 0$, *i.e.* $a \neq 0$.
5. Ce sont les racines réelles du polynôme caractéristique. Il n'y a que $3a$.
6. Le vecteur $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ est propre pour la valeur propre $3a$.
7. Puisque le polynôme caractéristique n'est pas scindé, u n'est pas diagonalisable.
8. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$. On a $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} \in P$ car $(y-z)+(z-x)+(x-y) = 0$.
9. Le vecteur propre t de u n'est pas dans P. On a donc une somme directe $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Vect}(t) \oplus P$, où chaque terme est stable par u. Ainsi le polynôme caractéristique de u est le produit des polynômes caractéristiques des restrictions à chacun des termes. Ainsi le polynôme R cherché vérifie $R(X)(3a - X) = (3a - X)(3 + X^2)$. On a donc $R(X) = 3 + X^2$.

Exercice 3.

1. Les valeurs propres de v sont les racines du polynôme caractéristique de v, qui n'est autre que le polynôme caractéristique de u. Ces racines sont $3a$, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$.
2. L'endomorphisme v est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé.
3. Si $a \neq i\sqrt{3}/3$ et $a \neq -i\sqrt{3}/3$ les racines du polynôme caractéristique sont simples. Ainsi v est diagonalisable.
4. Le plan Q est stable par v, comme le plan P est stable par u. Le polynôme caractéristique de la restriction de v à Q est X^2+3, qui n'a que des racines simples. Ainsi la restriction de v à Q est diagonalisable.
5. On a encore une somme directe $\mathbf{C}^3 = \mathrm{Vect}(t) \oplus Q$. Comme la restriction de v à chaque terme de cette somme est diagonalisable, v lui-même est diagonalisable.