Licence 3 Algèbre
2016-2017

Université Paris Diderot

Feuille de TD 9 – polynômes

Exercice 1. Effectuer les divisions euclidiennes de $3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3, de $3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2, et de X^4+X^3+X-2 par X^2-2X+4.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non-constant. Montrer que P n'a que des racines simples si et seulement si P et P' sont premiers entre eux. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ vérifiant $P' \mid P$.

Exercice 3. Trouver les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 4. Soit K un corps commutatif.

1. Déterminer tous les couples $(U, V) \in K[X]^2$ tel que $X^n U + (1-X)V = 1$, où $n \geq 1$.
2. Démontrer que $A(X) = X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r} \in \mathbf{R}[X]$ est divisible par X^2+X+1 pour tout $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition portant sur $(p, q) \in \mathbf{C}^2$, le polynôme X^8+X^4+1 divise-t-il $X^{8m}+pX^{4m}+q$?

Exercice 5. Soient a et b deux entiers positifs et d leur pgcd. Montrer que le pgcd de X^a-1 et X^b-1 dans $\mathbf{Z}[X]$ est X^d-1.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ qui vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. Montrer que les racines de P sont toutes égales à 0 ou 1. Montrer que P est nul ou une puissance de $X(X-1)$.

Exercice 7.

1. Soit $g \in \mathbf{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $f \in \mathbf{R}[X]$ tel que $f(0) = 0$ et $f(X) - f(X-1) = g(X)$. (On pourra raisonner par récurrence sur le degré du polynôme g.)
2. Soit k un entier ≥ 1. On désigne par $f = B_k$ le polynôme obtenu pour $g = X^k$. C'est le k-ème *polynôme de Bernoulli*. Prouver que pour tout $k \geq 1$ le polynôme B_k est divisible par $X+1$. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$B_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k.$$
3. Vérifier qu'on a $B_k'(X) = kB_{k-1}(X) + B_k'(0)$ où B_k' est le polynôme dérivé de B_k.
4. Soit h_k le polynôme qui a pour dérivé B_k et qui s'annule en $x = 0$. vérifier que
$$B_{k+1}(X) = (k+1)(h_k(X) + h_k(-1)X).$$
Calculer explicitement $B_k(X)$ pour $p = 1, 2, 3$ et 4. En déduire les sommes $1^k + 2^k + \ldots n^k$ pour $k = 1, 2, 3$ et 4.

Exercice 8. Soit K un corps commutatif. On se donne $m+1$ éléments distincts de K: $q_0, q_1, \ldots, q_m$. Expliciter pour tout $0 \leq j \leq m$ le polynôme $L_j \in K_m[X]$ satisfaisant

$$L_j(q_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Montrer que la famille des polynômes L_j forme une base de l'espace vectoriel $K_m[X]$. Pour tout polynôme P de $K_m[X]$ exprimer P dans la base $(L_j)_{0\leq j\leq m}$ en fonction des éléments $P(q_j)_{0\leq j\leq m}$. On note $\mathcal{P}(\mathbf{Q},\mathbf{Q})$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels prenant des valeurs rationnelles sur les rationnels. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[X]$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(X+1)+P(X) = 2X^n$. On note ce polynôme E_n. Montrer que $E_n' = nE_{n-1}$.

Exercice 10. Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On note u^n la composée n-ième de u. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \to & \mathrm{End}(E) \\ P(X) = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 & \mapsto & P(u) = a_nu^n + \ldots + a_1u + a_0 \,\mathrm{Id} \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux, qui de plus est K-linéaire.

Montrer que pour tout n, il existe un unique triplet $(Q, a_n, b_n) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}^2$ tel que $X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + a_nX + b_n$. Expliciter a_n et b_n. Application: soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E tel que $u^2 = 2\,\mathrm{Id} - u$. Exprimer u^n en fonction de u et Id.

Exercice 11. Soit A un anneau principal. Soit $P \in A[X]$. Montrer que pour tout $a \in A$, le polynôme P est irréductible si et seulement si le polynôme $P(X + a)$ l'est. Soit p un nombre premier. Soit $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbf{Z}[X]$, avec $p|a_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$, p ne divise pas a_n, p^2 ne divise par a_0. Montrer que P est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$. Posons $\Phi_p(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^{p-1}$. Montrer que $\Phi_p(X + 1)$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$, puis que $\Phi_p(X)$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 12. Montrer que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$ est un corps. Combien ce corps a-t-il d'éléments ? Montrer que, en tant que groupe abélien, il est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En considérant la table de multiplication, montrer qu'en tant qu'anneau il n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 13. On considère dans l'anneau $A = \mathbf{Z}[X]$ l'idéal I engendré par 2 et X. Quels sont les irréductibles de A? L'idéal I est-il engendré par un unique élément? Que peut-on en déduire? Les idéaux (2) et (X) sont-ils premiers? Maximaux? Montrer que l'identité de Bezout n'est pas valable dans A.

Exercice 14. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes de $\mathbf{R}(X)$: $X/(X^2-4)$, $(X^3 - 3X^2 + X - 4)/(X - 1)$, $(2X^3 + X^2 - X + 1)/(X^2 - 2X + 1)$, $(X + 1)/(X^4 + 1)$.

Exercice 15. Existe-t-il une fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F(X)^2 = (X^2 + 1)^3$?

Exercice 16. On rappelle la *division euclidienne* dans un anneau intègre: soit A un anneau intègre et $P_0 \in A[X]$ un polynôme unitaire. Pour tout $P \in A[X]$, il existe un unique couple (Q, R) avec $Q, R \in A[X]$ et $\deg(R) < \deg(P_0)$ tel que $P = QP_0 + R$.
On considère l'application $\phi : \mathbf{C}[X, Y] \to \mathbf{C}[T]$ qui à un polynôme $P(X, Y)$ associe le polynôme $P(T^2, T^3)$.

1. Indiquer brièvement pourquoi ϕ est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{C}[X, Y]$, il existe $Q, R_2, R_1, R_0 \in \mathbf{C}[Y]$ tel que
$$P(X, Y) = Q(Y)(X^3 - Y^2) + R_2(Y)X^2 + R_1(Y)X + R_0.$$
En déduire que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est l'idéal engendré par le polynôme $X^3 - Y^2$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \{P \in \mathbf{C}[T], P = T^2Q, Q \in \mathbf{C}[T]\}$, et que T^2 et T^3 sont irréductibles dans $Im\phi$.
4. En déduire que l'anneau quotient $\mathbf{C}[X, Y]/\ker\phi$ n'est pas factoriel.