

Feuille de TD 8 – polynômes

Exercice 1. Effectuer les divisions euclidiennes de $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$, de $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$, et de $X^4 + X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non-constant. Montrer que P n'a que des racines simples si et seulement si P et P' sont premiers entre eux. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ vérifiant $P' \mid P$.

Exercice 3. Trouver les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

Exercice 4. Soit K un corps commutatif.

1. Déterminer tous les couples $(U, V) \in K[X]^2$ tel que $X^n U + (1 - X)V = 1$, où $n \geq 1$.
2. Démontrer que $A(X) = X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r} \in \mathbf{R}[X]$ est divisible par $X^2 + X + 1$ pour tout $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition portant sur $(p, q) \in \mathbf{C}^2$, le polynôme $X^8 + X^4 + 1$ divise-t-il $X^{8m} + pX^{4m} + q$?

Exercice 5. Soient a et b deux entiers positifs et d leur pgcd. Montrer que le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$ dans $\mathbf{Z}[X]$ est $X^d - 1$.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ qui vérifie $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$. Montrer que les racines de P sont toutes égales à 0 ou 1. Montrer que P est nul ou une puissance de $X(X - 1)$.

Exercice 7.

1. Soit $g \in \mathbf{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $f \in \mathbf{R}[X]$ tel que $f(0) = 0$ et $f(X) - f(X - 1) = g(X)$. (On pourra raisonner par récurrence sur le degré du polynôme g .)
2. Soit k un entier ≥ 1 . On désigne par $f = B_k$ le polynôme obtenu pour $g = X^k$. C'est le k -ème *polynôme de Bernoulli*. Prouver que pour tout $k \geq 1$ le polynôme B_k est divisible par $X + 1$. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k.$$

3. Vérifier qu'on a $B'_k(X) = kB_{k-1}(X) + B'_k(0)$ où B'_k est le polynôme dérivé de B_k .
4. Soit h_k le polynôme qui a pour dérivé B_k et qui s'annule en $x = 0$. vérifier que

$$B_{k+1}(X) = (k + 1)(h_k(X) + h_k(-1)X).$$

Calculer explicitement $B_k(X)$ pour $p = 1, 2, 3$ et 4. En déduire les sommes $1^k + 2^k + \dots + n^k$ pour $k = 1, 2, 3$ et 4.

Exercice 8. Soit K un corps commutatif. On se donne $m + 1$ éléments distincts de K : q_0, q_1, \dots, q_m . Expliciter pour tout $0 \leq j \leq m$ le polynôme $L_j \in K_m[X]$ satisfaisant

$$L_j(q_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Montrer que la famille des polynômes L_j forme une base de l'espace vectoriel $K_m[X]$. Pour tout polynôme P de $K_m[X]$ exprimer P dans la base $(L_j)_{0 \leq j \leq m}$ en fonction des éléments $P(q_j)_{0 \leq j \leq m}$. On note $\mathcal{P}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels prenant des valeurs rationnelles sur les rationnels. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[X]$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(X+1) + P(X) = 2X^n$. On note ce polynôme E_n . Montrer que $E'_n = nE_{n-1}$.

Exercice 10. Soient K un corps commutatif, E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On note u^n la composée n -ième de u . Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \rightarrow & \text{End}(E) \\ P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 & \mapsto & P(u) = a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0 \text{Id} \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux, qui de plus est K -linéaire.

Montrer que pour tout n , il existe un unique triplet $(Q, a_n, b_n) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}^2$ tel que $X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + a_n X + b_n$. Expliciter a_n et b_n . Application: soit u un endomorphisme d'un \mathbf{R} -espace vectoriel E tel que $u^2 = 2\text{Id} - u$. Exprimer u^n en fonction de u et Id .

Exercice 11. Soit A un anneau principal. Soit $P \in A[X]$. Montrer que pour tout $a \in A$, le polynôme P est irréductible si et seulement si le polynôme $P(X + a)$ l'est. Soit p un nombre premier. Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbf{Z}[X]$, avec $p|a_i$ ($0 \leq i \leq n-1$), p ne divise pas a_n , p^2 ne divise pas a_0 . Montrer que P est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$. Posons $\Phi_p(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{p-1}$. Montrer que $\Phi_p(X+1)$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$, puis que $\Phi_p(X)$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 12. Montrer que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$ est un corps. Combien ce corps a-t-il d'éléments? Montrer que, en tant que groupe abélien, il est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En considérant la table de multiplication, montrer qu'en tant qu'anneau il n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 13. On considère dans l'anneau $A = \mathbf{Z}[X]$ l'idéal I engendré par 2 et X . Quels sont les irréductibles de A ? L'idéal I est-il engendré par un unique élément? Que peut-on en déduire? Les idéaux (2) et (X) sont-ils premiers? Maximaux? Montrer que l'identité de Bezout n'est pas valable dans A .

Exercice 14. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes de $\mathbf{R}(X)$: $X/(X^2-4)$, $(X^3-3X^2+X-4)/(X-1)$, $(2X^3+X^2-X+1)/(X^2-2X+1)$, $(X+1)/(X^4+1)$.

Exercice 15. Existe-t-il une fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F(X)^2 = (X^2+1)^3$?

Exercice 16. On rappelle la *division euclidienne* dans un anneau intègre: soit A un anneau intègre et $P_0 \in A[X]$ un polynôme unitaire. Pour tout $P \in A[X]$, il existe un unique couple (Q, R) avec $Q, R \in A[X]$ et $\deg(R) < \deg(P_0)$ tel que $P = QP_0 + R$.

On considère l'application $\phi : \mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ qui à un polynôme $P(X, Y)$ associe le polynôme $P(T^2, T^3)$.

1. Indiquer brièvement pourquoi ϕ est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{C}[X, Y]$, il existe $Q, R_2, R_1, R_0 \in \mathbf{C}[Y]$ tel que

$$P(X, Y) = Q(Y)(X^3 - Y^2) + R_2(Y)X^2 + R_1(Y)X + R_0.$$

En déduire que $\text{Ker}(\phi)$ est l'idéal engendré par le polynôme $X^3 - Y^2$.

3. Montrer que $\text{Im}(\phi) = \{P \in \mathbf{C}[T], P = T^2 Q, Q \in \mathbf{C}[T]\}$, et que T^2 et T^3 sont irréductibles dans $\text{Im}\phi$.
4. En déduire que l'anneau quotient $\mathbf{C}[X, Y]/\ker \phi$ n'est pas factoriel.