Licence 3 Algèbre
2016-2017

Université Paris Diderot

Feuille de TD8–Idéaux

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A.
1. Montrer que si $A^\times = A - \mathcal{M}$, A ne possède pas d'autre idéal maximal que $\mathcal{M}$.
2. Admettons désormais que tout idéal de A distinct de A est contenu dans un idéal maximal. Montrer que si A ne possède pas d'autre idéal maximal que $\mathcal{M}$, on a $A^\times = A - \mathcal{M}$.
3. Montrer que si $1 + \mathcal{M} \subset A^\times$, l'anneau A ne possède pas d'autre idéal maximal que $\mathcal{M}$.

Exercice 2. Soit p un nombre premier. Soit A un anneau intègre de caractéristique p.
1. Montrer que l'application $\phi : A \to A$ définie par $a \mapsto a^p$ est un homomorphisme injectif d'anneaux.
2. Montrer que c'est un isomorphisme si A est fini.
3. Supposons que A est un corps fini. Montrer que ϕ est l'identité si et seulement si A possède p éléments.

Exercice 3. Posons $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbf{C}/a, b \in \mathbf{Z}\}$.
1. Montrer que c'est un sous-anneau de $\mathbf{C}$. Est-ce un anneau intègre ?
2. Montrer que l'application $\mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}[i]$ qui à z associe $\bar{z}$ est un isomorphisme d'anneaux.
3. Posons, pour $z \in \mathbf{C}$, $N(z) = z\bar{z}$. Montrer qu'on a $N(zz') = N(z)N(z')$. En déduire que si $z \in \mathbf{Z}[i]^\times$, on a $N(z) = 1$ ou -1.
4. Montrer que $\mathbf{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$.
5. Montrer que tout nombre complexe s'écrit comme somme d'un élément de $\mathbf{Z}[i]$ et d'un nombre complexe de module < 1. Soit $z \in \mathbf{Z}[i]$, et $d \in \mathbf{Z}[i]$, $d \neq 0$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbf{Z}[i]$, et $r \in \mathbf{Z}[i]$ avec $N(r) < N(d)$ tels que $z = dq + r$.
6. Soit I un idéal non nul de $\mathbf{Z}[i]$. Soit $a \in I$, tel que $N(a)$ soit minimal dans $\{N(b)/b \in \mathbf{Z}[i], b \neq 0\}$. Montrer que l'idéal I est engendré par a. L'anneau $\mathbf{Z}[i]$ est-il principal ?

Exercice 4. Soit $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + ib\sqrt{5},\ a, b \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{C}$.
1. Montrer que c'est un anneau.
2. On considère l'application *norme* $N : A \to \mathbb{N}$ définie par $N(a + ib\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$. Montrer que, pour tout $x, y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. Montrer que $A^\times = \{x \in A/N(x) = 1\}$ et donc que $A^\times = \{-1, 1\}$.
4. Existe-t-il des éléments de norme 3?
5. Montrer que 3, $2 + i\sqrt{5}$ et $2 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A.
6. En déduire que A n'est pas principal.

Exercice 5. Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et soit $a \in A$. Parmi les énoncés suivants, certains sont vrais et certains sont faux. Selon le cas, donner une preuve ou un contre-exemple.
1. Si a est inversible, alors $a \notin \mathrm{Ker}(\phi)$.
2. Si $\phi(a)$ est inversible, alors a est inversible.
3. Si ϕ est bijectif et a est irréductible, alors $\phi(a)$ est irréductible.
4. Si a est inversible alors $\phi(a)^2$ est inversible.
5. Si ϕ est injectif et a irréductible, alors $\phi(a)$ est irréductible.
6. Si ϕ est surjectif et $\phi(a)$ irréductible, alors a est irréductible.

Exercice 6. Lesquels des anneaux suivants sont isomorphes entre eux : $\mathbf{Z}/72\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/54\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/36\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$?

Exercice 7. Soit n un nombre entier.
1. Montrer que la classe modulo n d'un entier k est inversible dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si et seulement si k et n sont premiers entre eux.
2. Soit $p \in \mathbf{Z}$ un nombre premier. Déterminer l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ et en déduire une nouvelle démonstration du petit théorème de Fermat ($n^p \equiv n\ [p]$).
3. Soit $\alpha > 0$ un entier. Déterminer l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})^\times$.
4. Soient a, b deux entiers premiers entre eux. En utilisant le théorème des restes chinois, montrer que le groupe $(\mathbf{Z}/ab\mathbf{Z})^\times$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/a\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/b\mathbf{Z})^\times$.
5. Posons $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ (décomposition en un produit de nombres premiers). Calculer l'ordre de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.

Exercice 8.
1. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x & \equiv & 3 & [17] \\ x & \equiv & 4 & [11] \\ x & \equiv & 5 & [6] \end{cases}$$

2. Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors trois pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier quatre pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors cinq pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?