Licence 3 Algèbre
2016-2017

Université Paris Diderot

Feuille de TD7–Anneaux

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des anneaux (avec les lois évidentes). Déterminer leurs éléments inversibles.

1. L'ensemble des nombres entiers ≥ 0.
2. L'ensemble des nombres pairs.
3. L'ensemble des nombres rationnels de dénominateur divisible par 10.
4. L'ensemble des nombres rationnels de dénominateur premier à 10.
5. L'ensemble des nombres rationnels de dénominateur impair.
6. L'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b rationnels.
7. L'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\pi$, avec a et b rationnels.
8. L'ensemble des nombres complexes de la forme $a + bi$, avec a et b entiers.
9. L'ensemble des couples (n, m) d'entiers tels que n et m ont même parité.
10. L'ensemble des suites à valeurs réelles qui tendent vers 0.
11. L'ensemble des suites bornées.
12. L'ensemble des fonctions continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
13. L'ensemble des fonctions croissantes $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
14. L'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
15. L'ensemble des suites à valeurs entières.
16. L'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients entiers.
17. L'ensemble des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients réels.
18. L'ensemble des séries entières à coefficients complexes.
19. L'ensemble des séries entières à coefficients complexes qui convergent sur $\mathbf{C}$.
20. L'ensemble des polynômes à coefficients réels.
21. L'ensembles des polynômes à coefficients réels qui prennent des valeurs entières en 0.
22. L'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ tels qui sont nuls modulo 3.

Exercice 2. Soit A un anneau, non nécessairement commutatif. Soient $a, b \in A$ tels que $1 - ab$ est inversible (notons c l'inverse). Montrer que $abc = c - 1$ et $cab = c - 1$. En déduire que $1 - ba$ est inversible. (On pourra considérer $1 + bca$.)

Exercice 3. Soit A un anneau. Soit $e \in A$. On dit que e est un *idempotent* de A si on a $e^2 = e$. Montrer que, si e est un idempotent, il en est de même de $1 - e$. Montrer que, si A est intègre, seuls 0 et 1 sont idempotents. Si A et B sont intègres, quels sont les idempotents de l'anneau produit $A \times B$? Lorsque A est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E, quels sont les idempotents de A ? Supposons A commutatif désormais. Supposons qu'il existe un idempotent $e \in A$ distinct de 0 et 1. On pose $d = 1 - e$, $B = eA$ et $C = dA$. Montrer que B et C sont des anneaux non nuls. Montrer que $\phi : A \to B \times C$ définie par $\phi(a) = (ba, ca)$ est un isomorphisme d'anneaux. Les anneaux B et C sont-ils des sous-anneaux de A ?

Exercice 4. Soit A un anneau intègre. Soit $x \in A$, $x \neq 0$. Montrer que l'application $\phi : A \to A$ définie par $\phi(a) = ax$ est un morphisme de groupe injectif. En déduire que si A est fini, alors A est un corps.

Exercice 5. Soit A un anneau intègre tel que $A[X]$ est principal, où $A[X]$ est l'anneau des polynômes à coefficients dans A. Montrer que A est intègre. En déduire que A est un corps.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif. Soit $a \in A$. On dit que a est *nilpotent* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $a^k = 0$. Montrer que les éléments nilpotents de A constituent un idéal de A. Quels sont les éléments nilpotents d'un anneau intègre ? Soit m un entier ≥ 1. Quels sont les éléments nilpotents de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$?

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif. Soit n un entier ≥ 1. Soient $a, b \in A$. Montrer la formule $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) = a^n - b^n$. Est-elle encore vraie dans un anneau non-commutatif ? En déduire que si m est un entier qui divise n, on a $a^m - 1$ divise $a^n - 1$. Est-ce encore vrai dans un anneau non-commutatif ?

Exercice 8. Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Notons $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G (c'est-à-dire des morphismes de groupes $G \to G$). Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau. Réciproquement, si A est un anneau, montrer que pour tout $a \in A$, l'application $x \mapsto ax$ est un endomorphisme de $(A, +)$. En déduire que A est isomorphe à un sous-anneau de $(\mathrm{End}(A), +, \circ)$.

Exercice 9. Montrer que tout anneau fini est de caractéristique finie. Donner un exemple d'anneau infini de caractéristique finie. Montrer que tout anneau A de caractéristique finie n admet un unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to A$, qui de plus est injectif. Montrer que tout corps de caractéristique première p admet un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Considérons l'anneau $\prod_{n=1}^{\infty}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Quelle est sa caractéristique ?

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel. Considérons l'anneau A des endomorphismes linéaires de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\{u \in A / \mathrm{Im}(u) \subset F\}$ est un idéal à droite de A. Montrer que $\{u \in A / F \subset \mathrm{Ker}(u)\}$ est un idéal à gauche de A. Montrer que l'ensemble des endomorphismes d'image de dimension finie est un idéal bilatère de A.

Exercice 11. Soit A un anneau commutatif. Soit I un idéal de A. Montrer que l'ensemble $\sqrt{I}$ formé par les éléments a tels qu'il existe n entier > 0 avec $a^n \in I$ est un idéal de A contenant I. Que vaut $\sqrt{\{0\}}$? Montrer que $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$? Déterminer $\sqrt{6\mathbf{Z}}$. Déterminer $\sqrt{24\mathbf{Z}}$.